1.) Akım fonksiyonu $\psi = -4x^2 + 4y^2 + 2x$ olan $xy -$ düzlemindeki daimi, iki boyutlu sıkıştırılamaz akış için;

a.) Hız bileşenlerinin denklemini bulunuz.

b.) Akımın fiziksel olarak mümkün olup olamadığını gösteriniz.

c.)Akımın hız potansiyelli olup olmadığını belirleyiniz. Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

d.) Akım çizgisinin denklemini elde ediniz.

e.) A(1,1) noktasındaki hız ve ivme bileşenlerini hesaplayınız.

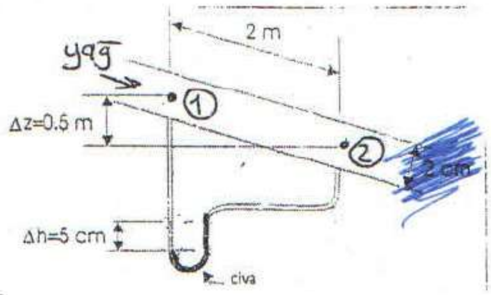
2.) a.) Bir orifisten geçen akışkanın debisi (Q), orifis çapı (d), basınç farkı (P), yoğunluk (ρ) ve viskozitenin (μ) bir fonksiyonu olduğuna göre, aşağıdaki bağıntının geçerli olduğunu boyut analizi ile gösteriniz.

$$Q = d^2\sqrt{\frac{P}{\rho}}\, f\left(\frac{d\sqrt{P\rho}}{\mu}\right)$$

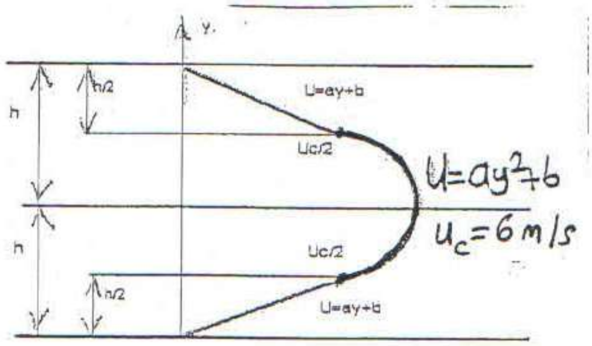
b.) Bu orifisin 1/5 ölçekli bir modeli ile prototipinde aynı akışkan kullanılacağına göre aşağıda verilen değerlerden yararlanarak tablodaki boşlukları doldurunuz.

	Model	Prototip
d	5mm	25mm
P	?	1bar
Q	?	$1 m^3/s$

3.) Viskozitesi $1,9 * 10^{-3} Pas$ ve yoğunluğu $\rho = 810\ kg/m^3$ olan bir yağ, $u = 2,2\ m/s$ hızla pürüzlülük kalınlığı $0,046\ mm$ olan ticari bir borudan akmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi $2\ m$ boyunda $0,5\ m$ eğimde basınç farkları, cıvalı bir manometre ile ölçülmektedir. Boru çapını bulunuz. ($f_{başlangıç} = 0,025$ alınız ve iki adım ilerleyiniz.)



4.) Şekilde verilen hız dağılımı için ortalama hızı ($\bar{U}$) ve momentum düzeltme faktörünü(β) hesaplayınız.



BAZI FORMÜLLER:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad Süreklilik$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad Açısal\ hız$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \psi{:}\ Akım\ fonksiyonu$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y},\ U = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \phi{:}\ Potansiyel\ fonksiyonu$$

$$a_x = \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx} + v\frac{dU}{dy}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} + U\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} \quad İvme \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{U} \quad Akım\ çizgisi$$

1. $\Psi = -4x^2 + 4y^2 + 2x$

a- Hız bileşenlerinin denklemi;

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 8y$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -(-8x) = 8x$$

b- Akımın fiziksel olarak mümkün olabilmesi için süreklilik denklemini sağlamalıdır. Yani;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$$ Akım fiziksel olarak mümkündür.

c- Akımın hız potansiyelli olabilmesi için $w_z = 0$ olmalıdır.

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \rightarrow = \frac{1}{2}(8-8) = 0$$ → hız potansiyellidir.

Potansiyel fonksiyonu ϕ ise

$$\left.\begin{aligned} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 8y &\rightarrow \int 8y\,\partial x = \int \partial \phi \rightarrow \phi_1 = 8yx \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 8x &\rightarrow \int 8x\,\partial y = \int \partial \phi \rightarrow \phi_2 = 8xy \end{aligned}\right\} \phi = 8xy + 8xy = 16xy$$

d) Akım çizgisi;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u} \rightarrow dy=\frac{v}{u}dx=\frac{\cancel{8}x}{\cancel{8}y}dx \rightarrow \int x\,dx=\int y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{c}{2}$$ Sabit istenilen şekilde yazılabilir.

$$x^2=y^2+c \rightarrow y=\sqrt{x^2-c}$$

e) $A(1,1)$ noktası için;

Hız bileşenleri;

$u_A=8y=8.1=8$ m/s

$v_A=8x=8.1=8$ m/s

$V=\sqrt{u_A^2+v_A^2}=\sqrt{8^2+8^2}$

$V=11{,}31$ m/s

İvme bileşenleri;

$$a_x=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}=0+8y(0)+8x.8$$

$a_x=0+64=64\ m/s^2$

$$a_y=\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}=0+8y.8+8x.(0)$$

$a_y=0+64=64\ m/s^2$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{64^2+64^2}=90{,}51\ m/s^2$$

---

2) a-

$Q=L^3T^{-1}$ $\quad \mu=ML^{-1}T^{-1}$

$\rho=ML^{-3}$ $\quad P=ML^{-1}T^{-2}$

$d=L$ $\quad [m=5]$

. Temel boyut sayısı (n) = (M,L,T) 3

. Oluşturulacak π grubu sayısı $m-n$

$5-3=2$

. Tekrarlanan değişkenler Q, d ve ρ olarak seçilir.

. π grupları

$$\phi(Q,d,P,\mu,\rho)=0 \qquad \pi_1=Q^{a_1}d^{b_1}\rho^{c_1}\mu$$

$$\phi(\pi_1,\pi_2)=0 \qquad \pi_2=Q^{a_2}d^{b_2}\rho^{c_2}P$$

Üs kuvvetlerin belirlenmesi,

π_1 için

$$M^0L^0T^0=(L^3T^{-1})^{a_1}(L)^{b_1}(ML^{-3})^{c_1}ML^{-1}T^{-1}$$

Yani $\pi_1=Q^{-1}d^1\rho^{-1}\mu=\dfrac{d.\mu}{\rho.Q}$

- $c_1+1=0$
- $3a_1+b_1-3c_1=0$
- $-a_1-1=0$

$a_1=-1$, $b_1=1$, $c_1=-1$ bulunur.

π_2 için;

$$M^0L^0T^0 = (L^3T^{-1})^{a_2}(L)^{b_2}(ML^{-3})^{c_2}MT^{-2}L^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ c_2+1=0 \\ \cdot\ 3a_2+b_2-3c_2=0 \\ \cdot\ -a_2-2=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_2=-2 \\ b_2=4 \\ c_2=-1 \end{array}$$

$$\pi_2 = Q^{-2}d^4\rho^{-1}P$$

$$= \frac{d^4P}{\rho Q^2}$$

$$\varnothing(\pi_1,\pi_2) = \varnothing\left(\frac{d\mu}{Q\rho}, \frac{d^4P}{\rho Q^2}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{d\mu}{Q\rho} = \varnothing_1\left(\frac{d^4P}{\rho Q^2}\right)$$

Denklemi istenen formatta elde etmek için;

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^2}} = \frac{\rho^{1/2}\,Q}{d^2\,P^{1/2}} = \pi_{2a}$$

$$\pi_{1a} = \pi_1\cdot\pi_{2a} = \frac{d\mu}{Q\rho}\,\frac{\rho^{1/2}Q}{d^2P^{1/2}} = \frac{\mu}{d\rho^{1/2}P^{1/2}}$$

$$\varnothing\left(\frac{1}{\pi_{1a}}, \pi_{2a}\right) = \varnothing\left[\frac{d\rho^{1/2}P^{1/2}}{\mu}, \frac{d^2P^{1/2}}{Q\rho^{1/2}}\right] = 0$$

$$Q = \frac{d^2P^{1/2}}{\rho^{1/2}}\varnothing\left(\frac{d\rho^{1/2}P^{1/2}}{\mu}\right)$$

---

b

$$(\mathrm{I})\ \frac{Q_m\cancel{\rho_m^{1/2}}}{d_m^2\,P_m^{1/2}} = \frac{Q_p\cancel{\rho_p^{1/2}}}{d_p^2\,P_p^{1/2}} \quad ; \quad \rho_m=\rho_p \text{ (akışkan aynı)}$$

$$(\mathrm{II})\ \frac{d_m\,P_m^{1/2}\,\cancel{\rho_m^{1/2}}}{\cancel{\mu_m}} = \frac{d_p\,P_p^{1/2}\,\cancel{\rho_p^{1/2}}}{\cancel{\mu_p}} \quad ; \quad \begin{array}{l}\rho_m=\rho_p \\ \mu_m=\mu_p\end{array} \text{ (akışkan aynı)}$$

$$5\,\cancel{mm}\times P_m^{1/2} = \cancel{25}^{\,5}\,\cancel{mm}\times 1 \text{ bar}$$

$$P_m^{1/2} = 5 \text{ bar} \longrightarrow P_m = 25 \text{ bar}$$

(I) denklemi kullanılarak;

$$\frac{Q_m}{d_m^2 P_m^{1/2}} = \frac{Q_p}{d_p^2 P_p^{1/2}} \rightarrow \frac{Q_m}{5^2 \times 25^{1/2}} = \frac{1 m^3/s}{25^2 \times 1^{1/2}} \rightarrow Q_m = 0{,}2\ m^3/s$$

bulunur.

(3) (1) ve (2) noktaları arasında Bernoulli denklemini uygularak;

$$\frac{P_1}{\rho g} + \cancel{\frac{u_1^2}{2g}} + z_1 - f\frac{L}{D}\frac{u^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \cancel{\frac{u_2^2}{2g}} + z_2 \quad ; \quad u_1 = u_2$$

$$f\frac{L}{D}\frac{u^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{yağ} \cdot g} + (z_1 - z_2) \quad ;$$

Basınç taraması yaparak,

$$P_1 + \rho_{yağ} \cdot g \cdot 0{,}5 + \rho_{yağ}\, g \cdot 0{,}05 = P_2 + \rho_{civa}\, g \cdot 0{,}05$$

$$P_2 - P_1 = \rho_{yağ} \cdot g \cdot 0{,}5 + (\rho_{yağ} - \rho_{civa})\, g \cdot 0{,}05$$

$$= 810 \times 9{,}81 \times 0{,}5 + (810 - 13600) \times 9{,}81 \times 0{,}05$$

$$P_2 - P_1 \cong -2300\ Pa \quad \text{bulunur.}$$

$$f \cdot \frac{2\,m}{D}\, \frac{2{,}2^2 (m/s)^2}{2 \times 9{,}81\ \frac{m}{s^2}} = \frac{2300}{810 \times 9{,}81} + 0{,}5$$

$$\frac{f}{D} = \frac{0{,}78945}{0{,}493374} = 1{,}6 = \frac{f}{D} \Rightarrow \boxed{f = 1{,}6\,D}$$

1. adım

$$D = \frac{f = 0{,}025}{1{,}6} = 0{,}015625\,m = 15{,}625\ mm \quad , \quad k = \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}046}{15{,}625} = 0{,}002944$$

$$Re = \frac{u D \rho}{\mu} = \frac{2{,}2 \times 0{,}015625 \times 810}{1{,}9 \times 10^{-3}} = 1{,}465 \times 10^4$$

$f=0,032$

2.adım $\rightarrow D=\dfrac{0,032}{1,6}=0,02\ m=20\ mm$

$k=\dfrac{\varepsilon}{D}=\dfrac{0,046}{20}=0,0023$

$Re=\dfrac{uD\rho}{\mu}=\dfrac{2,2\times0,02\times810}{1,9\times10^{-3}}=1,875\times10^{4}$

$f=0,031 \rightarrow D=0,02\,m=20\,mm$ bulunur.

---

4) Verilen hız profili için; (simetri ekseni referans kabul edilerek)

Parabolik profil için;

1-) $y=0 \rightarrow u=u_c \rightarrow u_c=a.0+b \Rightarrow \boxed{b=u_c}$

2-) $y=\dfrac{h}{2} \rightarrow u=\dfrac{u_c}{2} \rightarrow \dfrac{u_c}{2}=a.\left(\dfrac{h}{2}\right)^2+u_c \rightarrow a=\dfrac{\frac{u_c}{2}-u_c}{h^2/4}=\dfrac{\frac{-u_c}{2}}{\frac{h^2}{4}}=-\dfrac{2u_c}{h^2}$

$$\boxed{u=-\frac{2u_c}{h^2}y^2+u_c} \qquad \boxed{a=-\frac{2u_c}{h^2}}$$

Lineer profil için;

1-) $y=\dfrac{h}{2} \rightarrow u=\dfrac{u_c}{2}=a.\dfrac{h}{2}+b$

2-) $y=h \rightarrow u=0 \rightarrow 0=a.h+b$

$\dfrac{u_c}{2}=a\left(\dfrac{h}{2}-h\right) \rightarrow \dfrac{u_c}{2}=-\dfrac{a.h}{2} \rightarrow a=\dfrac{-u_c}{h}$

$b=-h.a \rightarrow b=-\cancel{h}.\dfrac{-u_c}{\cancel{h}}=+u_c$

$$\boxed{\begin{array}{c} a=-u_c/h \\ \hline b=u_c \end{array}}$$

$$\boxed{u=-\frac{u_c}{h}y+u_c}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{A}\int u\,dA = \frac{1}{h.1}\left[\int_0^{h/2}\left(-\frac{2u_c}{h^2}y^2 + u_c\right)dy + \int_{h/2}^{h}\left(-\frac{u_c}{h}y + u_c\right)dy\right]$$

$$\bar{u} = \frac{1}{h}\left\{\left[-\frac{2u_c}{h^2}\frac{y^3}{3} + u_c . y\right]_0^{h/2} + \left[-\frac{u_c . y^2}{h.2} + u_c . y\right]_{h/2}^{h}\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{-\frac{2u_c}{h^2}\frac{\cancel{h^3}^{h}}{8.3} + u_c\frac{h}{2} + \left[-\frac{u_c}{\cancel{h}}.\frac{\cancel{h^2}^{h}}{2} + u_c.h + \frac{u_c.\cancel{h^2}^{h}}{\cancel{h}\,4.2} - u_c\frac{h}{2}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}}u_c.\cancel{h}\left\{-\frac{2}{8.3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \bar{u} = u_c.\frac{13}{24} = 6\times\frac{13}{24} = 3{,}25 \text{ m/s}$$

$$(\bar{u} = 0{,}542u_c) \qquad \boxed{\bar{u} = 3{,}25 \text{ m/s}}$$

$$\beta = \frac{1}{A\bar{u}^2}\int u^2\,dA$$

$$= \frac{1}{h.(0{,}542u_c)^2}\left[\int_0^{h/2}\left(-\frac{2u_c}{h^2}y^2 + u_c\right)^2dy + \int_{h/2}^{h}\left(-\frac{u_c}{h}y + u_c\right)^2dy\right]$$

$$= \frac{1}{h.0{,}294u_c^2}\left[\int_0^{h/2}\left(\frac{4u_c^2y^4}{h^4} - \frac{4u_c^2y^2}{h^2} + u_c^2\right)dy + \int_{h/2}^{h}\left(\frac{u_c^2}{h^2}y^2 - 2\frac{u_c^2}{h}y + u_c^2\right)dy\right]$$

İntegral alınarak sınır şartları yerine yazıldığında,

$$= \frac{1}{h.0{,}294u_c^2}\left[\frac{4.u_c^2.\cancel{h^5}^{h}}{32.\cancel{h^4}.5} - \frac{4u_c^2\cancel{h^3}^{h}}{8.\cancel{h^2}.3} + u_c^2.\frac{h}{2} + \frac{u_c^2}{\cancel{h^2}}\frac{\cancel{h^3}^{h}}{3} - 2\frac{u_c^2}{\cancel{h}}\frac{\cancel{h^2}^{h}}{2} + u_c^2.h - \frac{u_c^2\cancel{h^3}^{h}}{\cancel{h^2}\,3.8}\right.$$

$$\left. + \frac{\cancel{2}u_c^2.\cancel{h^2}^{h}}{\cancel{h}.\cancel{2}.4} - u_c^2.\frac{h}{2}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{\cancel{h} \cdot 0{,}294\, \cancel{u_c^2}} \cdot \cancel{u_c^2} \cdot \cancel{h} \left[\frac{\cancel{4}}{\cancel{32}.5} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{8}.3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cancel{1} + \cancel{1} - \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{0{,}294} \left[\frac{1}{8.5} - \frac{1}{6} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\beta = \frac{1}{0{,}294} \times \frac{2}{5} \longrightarrow \boxed{\beta = 1{,}36 \text{ bulunur.}}$$