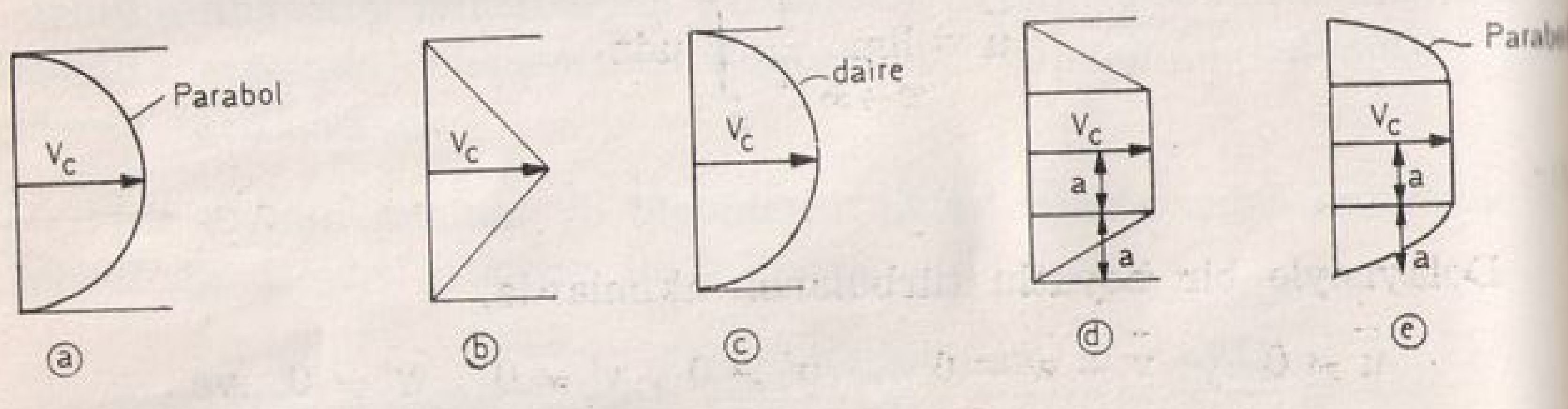
Türbülanslı akımlarda $\qquad \bar{\tau} = \tau_l + \bar{\tau}_t = \mu \dfrac{du}{dy} + -\rho\, \overline{u'v'}$

olur.

α ve β nın 1 alındığı, enerji kayıplarının da gözönünde tutulduğu bir boyutlu akım olarak incelenebilen boru akımları ve serbest yüzeyli akımlar ileriki bölümlerde detaylı olarak incelenecektir.

PROBLEM 6.1. Şekildeki hız dağılımları için, $V_c = 3$ m/s olduğuna göre, ortalama akım hızlarını bulunuz.



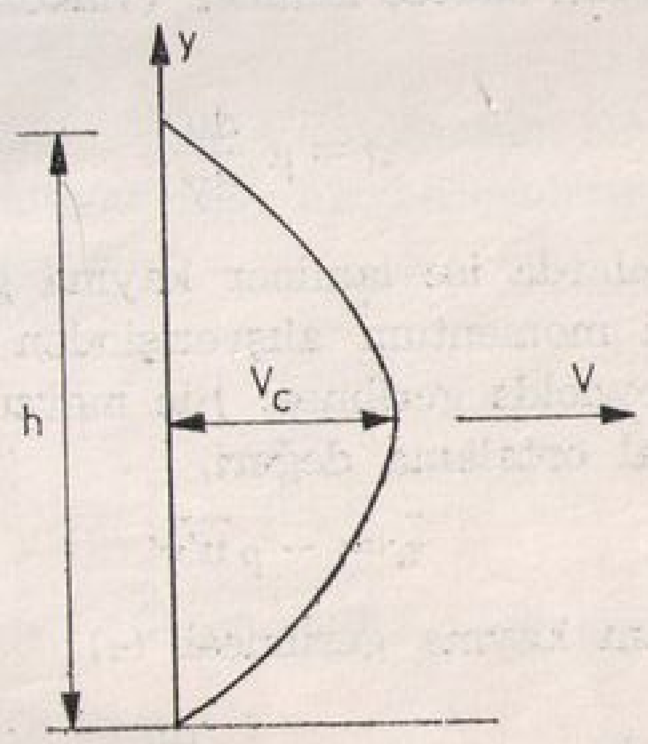
Şekil 6.2

ÇÖZÜMÜ

a)

$$V = ay^2 + by + C$$

$$y = 0 \;,\; V = V_c \;,\; c = V_c$$



Şekil 6.3

$$y = 0 \qquad \frac{dV}{dy} = 0 \;,\; 2ay + b = 0 \;,\; b = 0$$

$$y = \frac{h}{2} \;,\; V = 0 \;,\; \frac{ah^2}{4} + V_c = 0 \;,\; a = \frac{-4V_c}{h^2}$$

$$V = -\frac{4V_c}{h^2} y^2 + V_c$$

olur.

Şekil V eksenine göre simetrik olduğu için, ortalama hızı sadece bu eksenin üstündeki kısımda hesaplamak yeterli olacaktır. Şekil düzlemine dik derinlik birim alınabilir.

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_A V dA$$

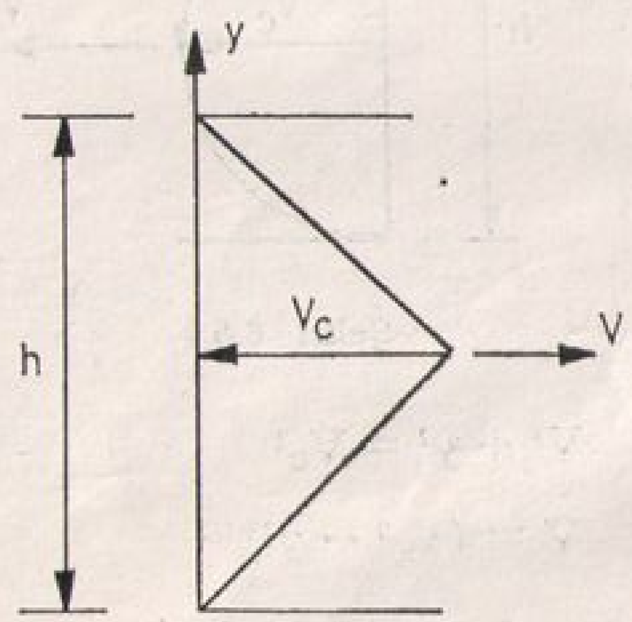
$$\bar{V} = \frac{1}{h/2} \int_0^{h/2} \left(-\frac{4V_c}{h^2} y^2 + V_c \right) dy = \frac{2}{h} \left[-\frac{4V_c}{h^2} \frac{y^3}{3} + V_c\, y \right]_0^{h/2}$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h} \left\{ \left[-\frac{4V_c}{h^2} \frac{h^3}{3 \cdot 2^3} + V_c \frac{h}{2} \right] - \left[0 \right] \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h} \left[-\frac{1}{6} V_c h + \frac{V_c h}{2} \right] = \frac{2}{3} V_c = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \text{ m/s}$$

elde edilir.

b)



Şekil 6.4

$$V = my + b$$

$$y = 0 \quad , \quad V = V_c \quad , \quad b = V_c$$

$$y = \frac{h}{2} \quad , \quad V = 0 \quad , \quad m\,\frac{h}{2} + V_c = 0 \quad , \quad m = -\,\frac{2V_c}{h}$$

$$V = -\,\frac{2V_c}{h}\,y + V_c$$

Şekil V eksenine göre simetrik olduğuna göre, şeklin yarısına göre hesap yapılabilir. Şekil düzlemine dik mesafe birim alınabilir.

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int_A V dA$$

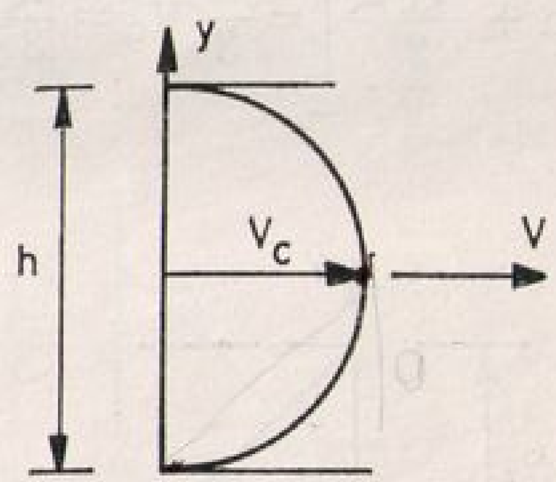
$$\bar{V} = \frac{1}{h/2}\int_0^{h/2}\left(V_c - \frac{2V_c}{h}\,y\right) dy = \frac{2}{h}\left[V_c y - \frac{2V_c}{h}\,\frac{y^2}{2}\right]_0^{h/2}$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h}\left\{\left[V_c\,\frac{h}{2} - \frac{2V_c}{h}\,\frac{h^2}{2\times 2^2}\right] - \left[\,0\,\right]\right\} = V_c - \frac{V_c}{2} = \frac{V_c}{2}$$

$$\bar{V} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ m/s}$$

elde edilir.

c)



Şekil 6.5

$$V^2 + y^2 = V_c^2$$

$$V = (V_c^2 - y^2)^{1/2}$$

Şekil V eksenine göre simetrik olduğu için şeklin yarısına göre hesap yapılabilir. Şekil düzlemine dik mesafe birim alınacaktır.

$X = a^2 - x^2$ ise,

$$\int X^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) \text{ olduğundan}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int_A V dA$$

$y\sqrt{V_c^2 - y^2} + V_c^2 \arcsin\frac{x}{a}$

$$\bar{V} = \frac{1}{h/2}\int_0^{h/2} (V_c^2 - y^2)^{1/2}\,dy$$

şeklinde verilmektedir.

$$V = \frac{2}{h}\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{V_c^2 - y^2} + V_c^2 \arcsin\frac{y}{V_c}\right)\right]_0^{h/2}$$

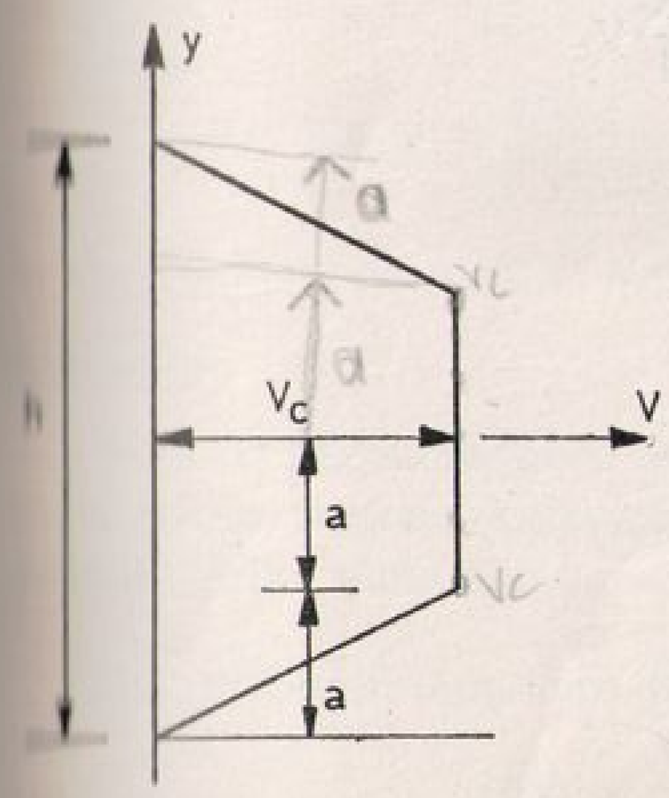
$$V = \frac{2}{h}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\sqrt{V_c^2 - \frac{h^2}{4}} + V_c^2 \arcsin\frac{h}{2V_c}\right) - \frac{1}{2}\,(0 + V_c^2 \arcsin 0)\right]$$

$$V = \frac{1}{h}\left[V_c^2\,\frac{\pi}{2} - V_c^2 \times 0\right] = \frac{1}{h}\,\frac{\pi}{2}\,V_c^2 = \frac{\pi}{2V_c\,2}\,V_c^2 = \frac{\pi}{4}\,V_c$$

$$V = \frac{3{,}14}{4} \times 3 = 2{,}35 \text{ m/s}$$

bulunur.

d)



Şekil 6.6

$$V = my + b$$

$$y = \frac{h}{2} \; , \; V = 0 \; , \; -\frac{h}{2}\,m = b$$

$$y = \frac{h}{4} \; , \; V = V_c \; , \; V_c = m\,\frac{h}{4} - m\,\frac{h}{2}$$

$$m = -\,\frac{4V_c}{h}$$

$$b = \frac{4V_c}{h}\,\frac{h}{2} = 2V_c$$

$$V = -\,\frac{4V_c}{h}\,y + 2V_c$$

elde edilir.

Şekil V eksenine göre simetrik olduğundan, ortalama hız sad… şeklin yarısı ile hesaplanabilir. Şekil düzlemine dik derinlik birim alın… bilir.

Hız profilinin denklemi $y = \left(0\ ,\ \frac{h}{4}\right)$ arasında $V = V_C$, $y = \left(\frac{h}{4}\ ,\ \frac{h}{2}\right)$ arasında ise $V = -\frac{4V_C}{h}\, y + 2V_C$ şeklindedir.

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int_A V dA$$

$$\bar{V} = \frac{1}{h/2}\left[\int_0^{h/4} V_C\, dy + \int_{h/4}^{h/2}\left(-\frac{4V_C}{h}y + 2V_C\right)dy\right]$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h}\left\{\left[V_C\, y\right]_0^{h/4} + \left[-\frac{4V_C}{h}\frac{y^2}{2} + 2V_C\, y\right]_{h/4}^{h/2}\right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h}\left\{\left[V_C\frac{h}{4} - 0\right] + \left[-\frac{4V_C}{h}\frac{h^2}{2\times 4} + 2V_C\frac{h}{2}\right] - \left[-\frac{4V_C}{h}\frac{h^2}{2\times 16} + 2V_C\frac{h}{4}\right]\right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h}\left[\frac{V_C h}{4} - \frac{V_C h}{2} + V_C h + \frac{V_C h}{8} - \frac{V_C h}{2}\right]$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h}\left[\frac{V_C h}{4} + \frac{V_C h}{8}\right] = \frac{2}{h}\ \frac{3V_C h}{8} = \frac{3}{4}V_C$$

$$\bar{V} = \frac{3}{4}\times 3 = 2{,}25 \text{ m/s.}$$

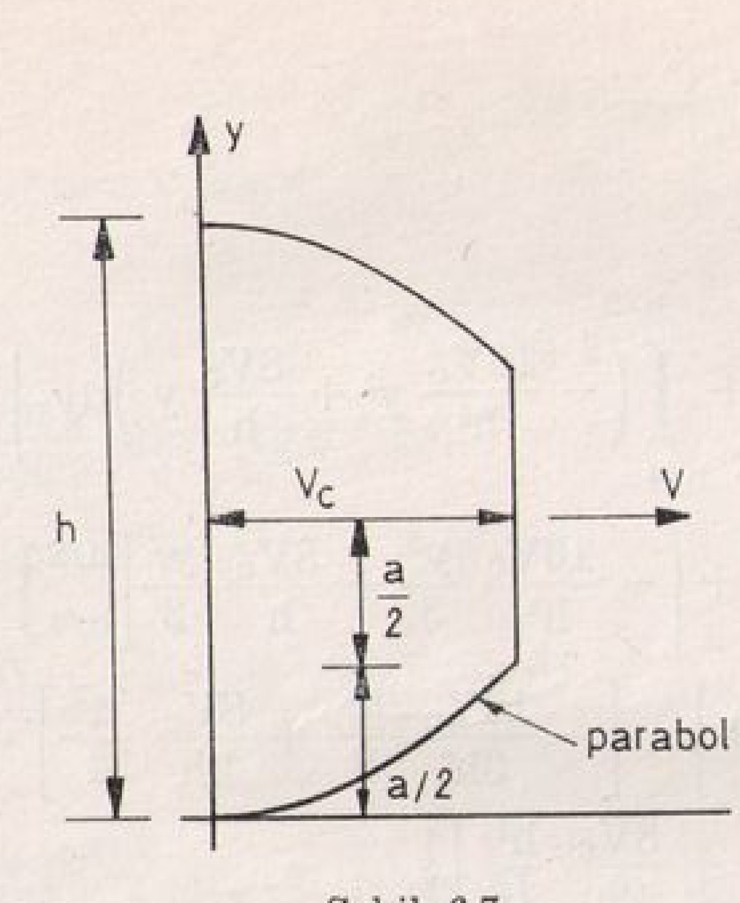
elde edilir.

e)

$$V = ay^2 + by + c$$

$$y = \frac{h}{4}\ ,\quad V = V_C$$

$$y = \frac{h}{2}\ ,\quad V = 0$$



Şekil 6.7

$$y = \frac{h}{4}\ ,\quad \frac{dV}{dy} = 0$$

$$y = \frac{h}{2}\ ,\quad V = 0\ ,\quad c = 0$$

$$y = \frac{h}{4}\ ,\quad V = V_C\ ,\quad V_C = a\frac{h^2}{16} + b\frac{h}{4}$$

$$\frac{dV}{dy} = 2ay + b = 0 \qquad 2a\frac{h}{4} + b = 0\ ,\quad b = -\frac{ah}{2}$$

$$V_C = a\frac{h^2}{16} - \frac{ah}{2}\frac{h}{4} = ah^2\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{ah^2}{16}$$

$$a = -\frac{16V_C}{h^2}\ ,\quad b = +\frac{16V_C}{h^2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{8V_C}{h}$$

$$V = -\frac{16V_C}{h^2}y^2 + \frac{8V_C}{h}y$$

elde edilir.

Şekil V eksenine göre simetrik olduğu için ortalama hızın hesabında şeklin yarısını kullanmak yeterli olmaktadır. Şekil düzlemine dik derinlik birim alınabilir.

Hız profilinin denklemi $y = \left(0\ ,\ \frac{h}{4}\right)$ arasında $V = V_C$, $y = \left(\frac{h}{4}\ ,\ \frac{h}{2}\right)$ arasında ise $V = -\frac{16V_C}{h^2}y^2 + \frac{8V_C}{h}y$ şeklindedir.

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_A V dA$$

$$\bar{V} = \frac{1}{h/2} \left[\int_0^{h/4} V_c \, dy + \int_{h/4}^{h/2} \left(- \frac{16V_c}{h^2} y^2 + \frac{8V_c}{h} y \right) dy \right]$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h} \left\{ \left[V_c \, y \right]_0^{h/4} + \left[- \frac{16V_c}{h^2} \frac{y^3}{3} + \frac{8V_c}{h} \frac{y^2}{2} \right]_{h/4}^{h/2} \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h} \left\{ \left[V_c \frac{h}{4} - 0 \right] + \left[- \frac{16V_c}{3h^2} \frac{h^3}{8} + \frac{8V_c}{2h} \frac{h^2}{4} \right] - \left[- \frac{16V_c}{3h^2} \frac{h^3}{64} + \frac{8V_c}{2h} \frac{h^2}{16} \right] \right\}$$

$$\bar{V} = \frac{2}{h} \left[V_c \frac{h}{4} - \frac{2}{3} V_c h + V_c h + \frac{V_c h}{12} - \frac{V_c h}{4} \right]$$

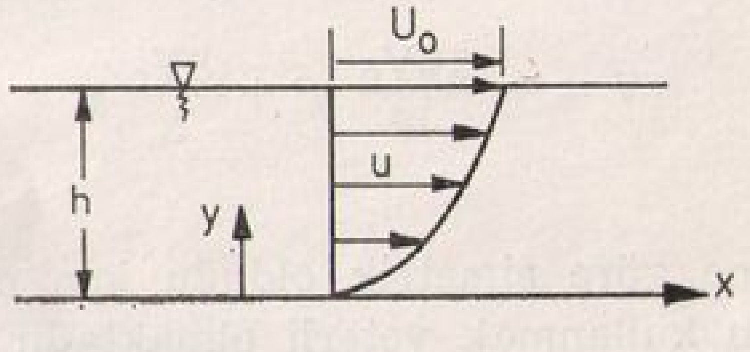
$$\bar{V} = \frac{2}{h} V_c h \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= 2V_c \left[\frac{3 - 8 + 12 + 1 - 3}{12} \right] = \frac{5}{6} V_c$$

$$\bar{V} = \frac{5}{6} \times 3 = 2{,}5 \text{ m/s}$$

elde edilir.

PROBLEM 6.2. a) İki boyutlu bir akımda x ve y doğrultuları daki hız bileşenleri $u = V_0 \cdot \cos\theta$, $v = V_0 \cdot \sin\theta$ olarak verilmiştir. V ve θ sabittir. Bu akıma ait akım çizgilerinin denklemini elde ediniz.



Şekil 6.8

b) Serbest yüzeyli bir akımda (açık kanal akımı) hız dağılı $u = U_0 \left(\frac{y}{h}\right)^{1/7}$ şeklindedir. $U_0 = 1{,}5$ m/s. h = 2 m ve kanal genişli 4 m olduğuna göre, kanaldan geçen debiyi hesabediniz.

ÇÖZÜMÜ

a) $u = V_0 \cos\theta$, $v = V_0 \sin\theta$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \qquad \frac{dx}{V_0 \cos\theta} = \frac{dy}{V_0 \sin\theta}$$

$$dy = \frac{V_0 \sin\theta}{V_0 \cos\theta} dx = tg\,\theta \cdot dx$$

$$y = x \cdot tg\,\theta + C$$

b) $Q = \int_A u \cdot dA$, $dA = B \cdot dy = 4 \cdot dy$

$$Q = \int_{y=0}^{y=2} U_0 \left(\frac{y}{h}\right)^{1/7} 4 \cdot dy = \int_0^2 1{,}5 \left(\frac{y}{2}\right)^{1/7} \cdot 4 \cdot dy$$

$$= \frac{6}{(2)^{1/7}} \int_0^2 y^{1/7} dy = \frac{6}{(2)^{1/7}} \cdot \frac{7}{8} \left| y^{8/7} \right|_0^2$$

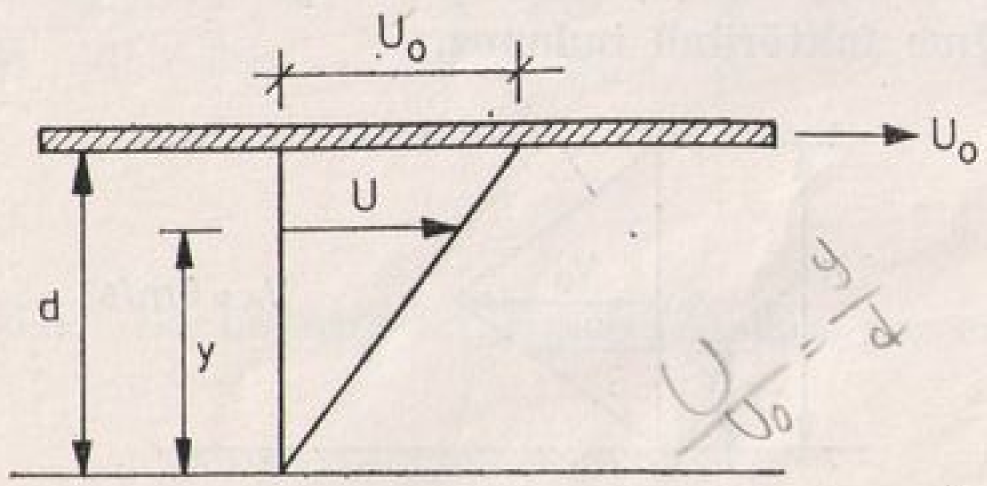
$$= \frac{6}{(2)^{1/7}} \cdot \frac{7}{8} \cdot (2)^{8/7}$$

$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{8}$$

$$= 10{,}50 \text{ m}^3/\text{s}$$

elde edilir.

PROBLEM 6.3. Paralel iki levha arasındaki bir akımda hız dağılımı $u = u_0 \frac{y}{d}$ şeklindedir. Bu akım için kinetik enerji düzeltme faktö-



$\frac{U}{U_0} = \frac{y}{d}$

Şekil 6.9

rü (α) ile, momentum düzeltme faktörü (β) yı belirleyiniz. Şekil dü... lemine dik derinlik 1 m dir.

$$\left(\alpha = \frac{1}{AV^3}\int_A u^3\,dA \quad , \quad \beta = \frac{1}{AV^2}\int_A u^2\,dA \quad , \quad V = \text{ortalama hız} \right)$$

ÇÖZÜMÜ

$$A = d \times 1 \quad , \quad dA = dy \times 1$$

$$\text{ortalama hız, } V = \frac{1}{A}\int_A u\,dA = \frac{1}{d}\int_0^d \frac{u_0}{d}\,y\,dy = \frac{u_0}{d^2}\,\frac{d^2}{2} = \frac{u_0}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{AV^3}\int_A u^3\,dA = \frac{1}{d\,\frac{u_0^3}{8}}\int_0^d \frac{u_0^3}{d^3}\,y^3\,dy = \frac{8}{du_0^3}\,\frac{u_0^3}{d^3}\left|\frac{y^4}{4}\right|_0^d$$

$$\alpha = \frac{8}{d^4}\,\frac{d^4}{4} = 2$$

bulunur.

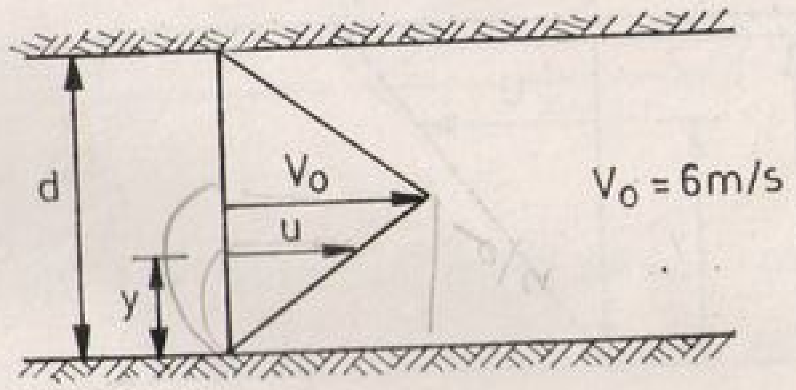
$$\beta = \frac{1}{AV^2}\int_A u^2\,dA = \frac{1}{d\,\frac{u_0^2}{4}}\int_0^d \frac{u_0^2}{d^2}\,y^2\,dy$$

$$= \frac{4}{dU_0^2}\,\frac{u_0^2}{d^2}\,\frac{d^3}{3} = \frac{4}{3}$$

elde edilir.

$u = \frac{6y}{d/2}$

PROBLEM 6.4. Şekilde düzlemsel üçgen hız dağılımından, ke... sel ortalama akım hızını, (α) kinetik enerji düzeltme faktörü, (β) m... mentum düzeltme faktörünü bulunuz.



Şekil 6.10

ÇÖZÜMÜ

Şekildeki hız dağılımı $u = u_0\,\frac{y}{d/2} = 2u_0\,\frac{y}{d}$ şeklinde ifade edilebilir. Buna göre,

$$V_{ort} = \frac{\int u\,dA}{A} = \frac{\int_0^{d/2} 2u_0\,\frac{y}{d}\,dy}{\frac{d}{2}} = \frac{2u_0}{d}\,\frac{2}{d}\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{d/2}$$

$$V_{ort} = \frac{4u_0}{d^2}\,\frac{d^2}{8} = \frac{u_0}{2} = 3 \text{ m/s}$$

elde edilir.

$$\alpha = \frac{1}{V^3A}\int_0^{d/2} u^3\,dA = \frac{1}{\frac{u_0^3}{8}\,\frac{d}{2}}\int_0^{d/2}\frac{8u_0^3}{d^3}\,y^3\,dy$$

$$\alpha = \frac{16}{u_0^3 d}\,\frac{8u_0^3}{d^3}\left|\frac{y^4}{4}\right|_0^{d/2} = \frac{128}{d^4}\cdot\frac{d^4}{64} = 2$$

elde edilir.

$$\beta = \frac{1}{V^2A}\int_0^{d/2} u^2 dA = \frac{1}{\frac{u_0^2}{4}\,\frac{d}{2}}\int_0^{d/2}\frac{4u_0^2}{d^2}\,y^2\,dy$$

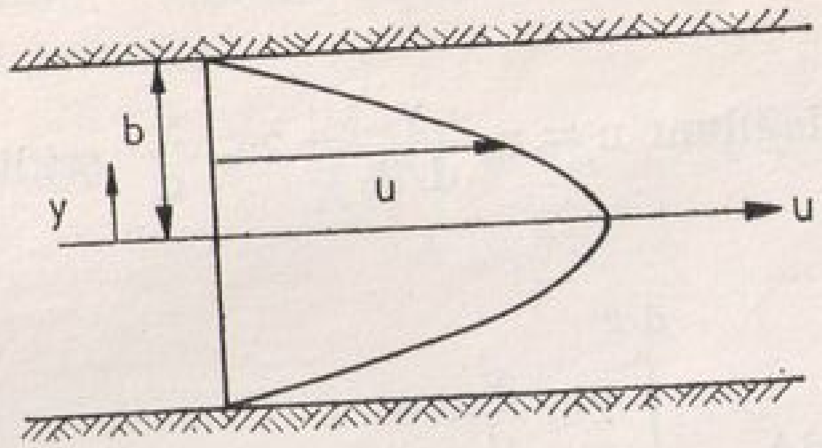
$$\beta = \frac{8}{u_0^2 d}\,\frac{4u_0^2}{d^2}\left|\frac{y^3}{3}\right|_0^{d/2} = \frac{32}{d^3}\cdot\frac{d^3}{24} = \frac{4}{3}$$

elde edilir.

PROBLEM 6.5. İki boyutlu harekette akışkan gerçek olup hız dağılımı

$$u = a(b^2 - y^2)$$

... α, β düzeltme katsayılarını bulunuz.



Şekil 6.11

ÇÖZÜMÜ

$$Q = 2\int_0^b u\,dy = 2a\int_0^b (b^2 - y^2)\,dy$$

$$= 2a\left[b^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^b = 2a\left[b^3 - \frac{b^3}{3}\right] = \frac{4ab^3}{3}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4ab^3}{3\times 2b} = \frac{2}{3}\,ab^2$$

$$V_{max} = ab^2\ ,\quad V_{ort} = \frac{2}{3}V_{max}$$

$$\alpha = \frac{1}{V^2Q}\int_0^{dA} u^3 dA$$

$$\int_0^{dA} u^3 dA = 2a^3\int_0^b (b^2 - y^2)^3 dy$$

$$= 2a^3\left[\int_0^b b^6dy - \int_0^b 3b^4y^2dy + \int_0^b 3b^2y^4dy - \int_0^b y^6dy\right]$$

$$= 2a^3\left[b^6y - 3b^4\frac{y^3}{3} + 3b^2\frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7}\right]_0^b$$

$$= 2a^3b^7\left[1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right] = \frac{32}{35}\,a^3b^7$$

$$\alpha = \frac{\frac{32}{35}a^3b^7}{\frac{4}{9}a^2b^4\,\frac{4}{3}\,ab^3.} = \frac{54}{35} = 1{,}543$$

bulunur.

$$\beta = \frac{1}{VQ}\int_0^{dA} u^2 dA$$

$$\int_0^{dA} u^2 dA = 2a^2\int_0^b (b^2 - y^2)^2 dy$$

$$= 2a^2\left[\int_0^b b^4dy - \int_0^b 2b^2y^2dy + \int_0^b y^4dy\right]$$

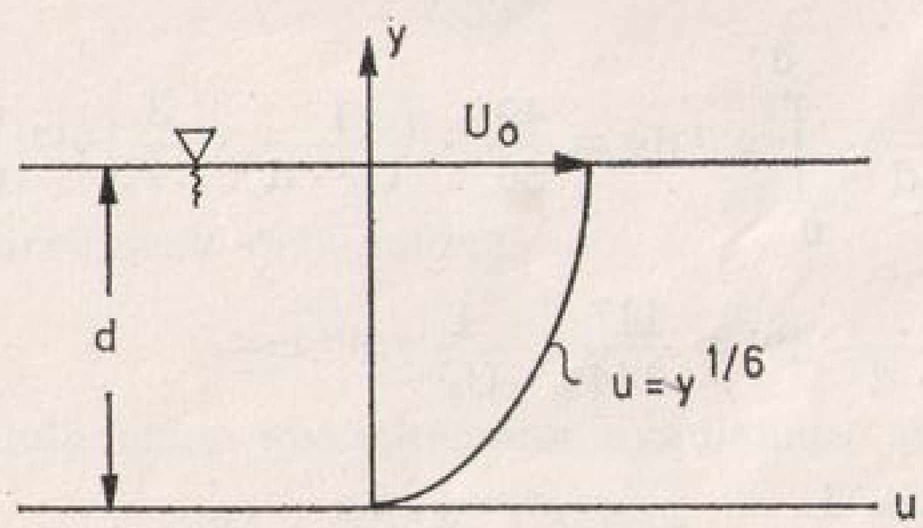
$$= 2a^2\left[b^4y - 2b^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^b$$

$$= 2a^2b^5\left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right] = \frac{\cancel{16}\ 18}{15}\,a^2b^5$$

$$\beta = \frac{\frac{16}{15}b^5a^2}{\frac{2}{3}ab^2\,\frac{4ab^3}{3}} = 1{,}2$$

elde edilir.

PROBLEM 6.6. $u = y^{1/6}$ **ise hız dağılımı için V (ortalama akım hızını),** α **ve** β **düzeltme faktörlerini hesaplayınız.**



Şekil 6.12

ÇÖZÜMÜ

$$A = d \cdot 1 \quad , \quad dA = dy \cdot 1 = dy \quad , \quad U_0 = d^{1/6}$$

$$\text{Ortalama Hız} = V = \frac{1}{A}\int_A u\,dA$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \int y^{1/6}dy = \frac{1}{d} \cdot \frac{6}{7} \cdot d^{7/6} = \frac{6}{7}\,d^{1/6} = \frac{6}{7}\,U_0 .$$

$$\alpha = \frac{1}{AV^3}\int_A u^3 dA = \frac{1}{d \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 U_0^3} \cdot \int_0^d (y^{1/6})^3 \cdot dy$$

$$= \frac{343}{216} \cdot \frac{1}{U_0^3 \cdot d} \cdot \int_0^d y^{1/2}\,dy$$

$$= \frac{343}{216} \cdot \frac{1}{U_0^3 \cdot d} \cdot \frac{2}{3}\left| y^{3/2} \right|_0^d$$

$$= \frac{686}{648} \cdot \frac{1}{U_0^3 \cdot d} \cdot d^{3/2} = \frac{686}{648} \cdot \frac{1}{U_0^3} \cdot d^{1/2} =$$

$$= \frac{686}{648} \cong 1{,}06 \approx 1$$

$$\beta = \frac{1}{AV^2} \cdot \int u^2 dA = \frac{1}{d \cdot \left(\frac{6}{7}U_0\right)^2} \cdot \int (y^{1/6})^2 \cdot dy$$

$$= \frac{49}{36} \cdot \frac{1}{U_0^2 \cdot d} \cdot \int_0^d y^{1/3}\,dy = \frac{49}{36} \cdot \frac{1}{U_0^2 \cdot d} \cdot \frac{3}{4}\left| y^{4/3} \right|_0^d$$

$$= \frac{147}{144} \cdot \frac{1}{U_0^2 \cdot d} \cdot d^{4/3} = \frac{147}{144} \cdot \frac{1}{U_0^2} \cdot d^{1/3} =$$

$$= \frac{147}{144} \cong 1{,}02 \approx 1$$

bulunur.

PROBLEM 6.7. Su içine batmış bir R cismini gözönüne alalım.

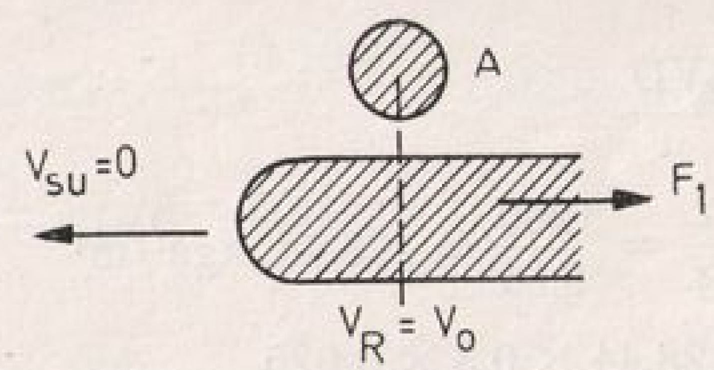
a) suyun hızının sıfır, R cisminin hızının V_0 olması halinde, suyun R cismine uyguladığı direnç kuvveti F_1 olsun.

b) R cisminin hızının sıfır, suyun V_0 ortalama hızı ile türbilanslı rejimde akması halinde, suyun R cismine uyguladığı itki kuvveti F_2 olsun.

c) $F_2 > F_1$ olması gerektiğini gösteriniz.

ÇÖZÜMÜ

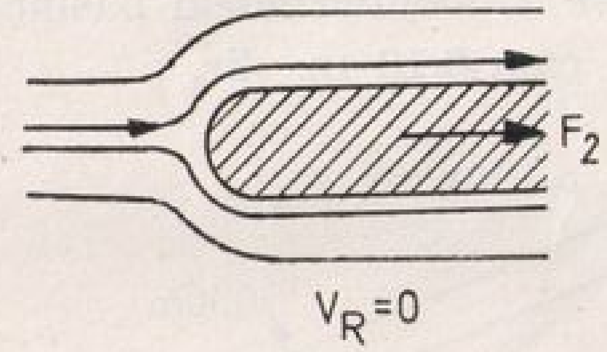
a) Bu taktirde akımın R cisminin hareketine uyguladığı direnç kuvveti



Şekil 6.13

$$F_1 = \rho A V_0^2$$

A, R cisminin hareket doğrultusuna dik enine kesitinin yüz ölçümüdür.



Şekil 6.14

b) Hareket türbülanslı olduğundan

$$V = \bar{v} + v' = V_0 + v'$$

olup, dA yüz ölçümlü enine kesit kısmına uygulanan elemanter itki

$$\rho\,dQ\,V = \rho(V_0 + v')^2 dA$$

olur. Buradan toplam itki

$$F_2 = \rho \int_A (V_0 + v')^2 dA = \rho V_0^2 (1 + \beta) \quad , \quad \beta = \frac{\int (V_0 + V')^2}{V_0^2 A}$$

$\beta > 0$ olduğu içinde $F_2 > F_1$ olur.

Buna Du Buat paradoksu adı verilir.

PROBLEM 6.8. 2,5 cm çaplı bir boru içerisinde sıvı olarak gliserin akmaktadır. Akımın kesitsel ortalama hızı 0,30 m/s dir. Bu akımın laminer mi yoksa türbülanslı mı olduğunu belirleyiniz. (Gliserinin özgül ağırlığı 1,26 gr/cm³, dinamik viskozitesi $\mu = 9 \cdot 10^{-4}$ kgs/m² dir).

ÇÖZÜMÜ

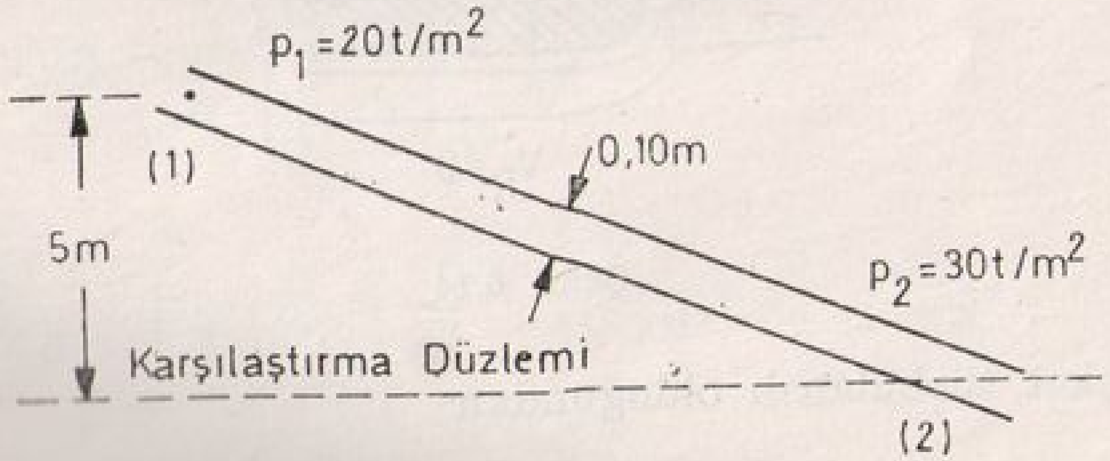
$$R_e = \frac{\rho V D}{\mu}$$

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1260}{9,81} = 128,44 \ \text{kgs}^2/\text{m}^4$$

$$R_e = \frac{128,44 \times 0,3 \times 0,025}{9 \times 10^{-4}} = 1070 < 2000$$

Akım laminerdir.

PROBLEM 6.9. Şekildeki boruda akım meydana gelmektedir. Akışkan gerçek olup viskozitesi $\mu = 103 \times 10^{-6}$ kgs/m², özgül ağırlığı $\gamma = 0.9$ ton/m³ dür. 1. ve 2. kesitlerindeki basınçlar sırası ile 20 ton/m² ve 30 ton/m² dir. Boru çapı 0.10 m. dir.



Şekil 6.15

a) Akımın yönünü bulunuz.

b) (2) kesitindeki enerji yüksekliği 34 m. iken akımın debisini ve enerji kayıbını bulunuz.

c) Reynolds sayısını bularak akımın türünü (laminer veya türbülanslı) bulunuz.

ÇÖZÜMÜ

a) $H_1 = Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = 5 + \frac{20}{0,9} + \frac{V^2}{2g} = 27,22 + \frac{V^2}{2g}$

$H_2 = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = 0 + \frac{30}{0,9} + \frac{V^2}{2g} = 33,33 + \frac{V^2}{2g}$

$H_2 > H_1$, Akım (2) den (1) e doğrudur.

b) $H_2 = 33,33 + \frac{V^2}{2g} = 34 \quad , \quad \frac{V^2}{2g} = 0,67 \text{ m} \quad , \quad V = 3,63 \text{ m/s}$

$$Q = VA = 3,63 \cdot \frac{\pi \cdot (0,10)^2}{4} = 0,0285 \ \text{m}^3/\text{s},$$

$$h_k = 33,33 - 27,22 = 6,11 \ \text{m}.$$

bulunur.

c) $R_e = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\frac{900}{9,81} \cdot 3,63 \cdot 0,10}{103.10^{-6}} = 323328 > 2000$

Türbülanslı akım oluşmaktadır.

BÖLÜM 7

İDEAL AKIŞKANLARIN İKİ BOYUTLU AKIMLARI

x-y düzleminde oluşan, permanan iki boyutlu bir akım için temel denklemler;

a) Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad , \text{ sıkışabilen akışkan için,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \text{ sıkışmaz akışkan için,}$$

b) Hareket denklemi; (x ekseni yatay, y ekseni düşey iken)

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

dir. Bunlara Euler hareket denklemleri adı verilir.

c) Enerji denklemi;

Aynı akım çizgisi üzerinde iki nokta arasında,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

şeklindedir. Burada, $V^2 = u^2 + v^2$ dir.

POTANSİYEL AKIMLAR :

Bir akım ortamında akışkan elemanları sadece öteleme hareketi yaparsa akım çevrintisiz (potansiyel), öteleme hareketine ilâve olarak dönme hareketi de yaparlarsa akım çevrintili (potansiyel olmayan) dır. Bu dönme hareketinin açısal hızı çevrinti (rotasyon) olarak isimlendirilir. Çevrinti;

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

dir. $w_z = 0$ ise akım çevrintisiz, $w_z \neq 0$ ise akım çevrintilidir. Potansiyel akımlarda;

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{ve} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir $\psi = \psi(x, y)$ akım fonksiyonu ve,

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{ve} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir potansiyel fonksiyonu tanımlanabilir.

Bir akım çizgisi boyunca ψ = sabit, bir potansiyel çizgisi boyunca da ϕ = sabit dir. Potansiyel akımlarda akım çizgileri ve potansiyel çizgileri çizildiğinde ortogonal (birbirine dik) çizgilerden oluşan bir ağ elde edilir. Buna akım ağı adı verilir.

Bir akım ortamında kapalı bir eğri boyunca hesaplanan

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot \vec{ds} = \oint (u \cdot dx + v \cdot dy)$$

integraline sirkülasyon adı verilir. Potansiyel akımlarda bunun değeri sıfıra eşittir.

Potansiyel akımlarda, süreklilik, hareket ve enerji denklemleri, yukarıda ideal akışkanların iki boyutlu akımı için yazılan temel denklemlerle aynidir. Yalnız enerji (Bernoulli) denklemi uygulanırken (1) ve (2) noktalarının ayni akım çizgisi üzerinde bulunması şartı aranmaz, bu noktalar akım ortamı içerisinde, herhangi iki nokta olabilir.

PROBLEM 7.1. Sıkışmaz bir akışkanın iki boyutlu akımında hız bileşenleri $u = -\frac{y}{b^2}$ **ve** $v = \frac{x}{a^2}$ **şeklinde verilmiştir. (a ve b sabitlerdir).**

a) Bu akım fizik olarak mümkün müdür?

b) Bu akıma ait akım fonksiyonunu bulunuz.

c) Akım çizgisinin denklemini elde ediniz.

d) Bu akımın hız potansiyelli olup olmadığını gösteriniz. Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonunu elde ediniz.

ÇÖZÜMÜ

a) Akım süreklilik denklemini sağlamalıdır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

Akım fizik olarak mümkündür.

b) $$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{y}{b^2} \quad , \quad \psi_1 = -\frac{y^2}{2b^2} + c_1(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{x}{a^2} \quad , \quad \psi_2 = -\frac{x^2}{2a^2} + c_2(y)$$

Akım fonksiyonu $\psi = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + c$

olur.

c) Akım çizgisi denklemi,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{-\frac{y}{b^2}} = \frac{dy}{\frac{x}{a^2}} \quad , \quad \frac{1}{a^2}\int x dx = -\frac{1}{b^2}\int y\, dy$$

$$\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} = -\frac{1}{2}\frac{y^2}{b^2} + c$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = c$$

elde edilir.

d) $$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \neq 0$$

Potansiyel akım değildir.

PROBLEM 7.2. **İki boyutlu bir akımda $u=2(1+t)$ ve $v=3(1+t)$ olarak verilmiştir.**

a) Bu akım fiziksel olarak mümkünmüdür?

b) Akım permanan mıdır?

c) Bu akım hız potansiyelli midir? Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonunu belirleyiniz.

d) $t = 2s$ için $A(3,2)$ m noktasında akımın hız ve ivmesini bulunuz.

ÇÖZÜMÜ

a) Süreklilik denklemini sağlamalıdır,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Fiziksel olarak mümkündür.

b) $$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 3$$

Akım permanan değildir.

c) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{Koşulunu sağlamalıdır.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{Potansiyel akımdır.}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2 + 2t \quad , \quad \phi = 2x + 2tx + \text{sabit}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3 + 3t \quad , \quad \phi = 3y + 3ty + \text{sabit}$$

$$\phi = 2x + 3y + (2x + 3y)t + \text{sabit}$$

Elde edilir.

d) $u = 2(1 + t) = 2(1 + 2) = 6$ m/s

$v = 3(1 + t) = 3(1 + 2) = 9$ m/s

$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10{,}82$ m/s

bulunur.

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$a_x = 2$ m/s^2

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$a_y = 3 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4+9} = 3{,}61 \text{ m/s}^2$$

bulunur.

PROBLEM 7.3. İdeal ve sıkışmaz bir akışkanın iki boyutlu akımında hız bileşenleri,

$u = -2 \cdot ax, \quad v = 2 \cdot ay$ şeklinde verilmiştir. (a sabittir).

a) Böyle bir akım fiziksel olarak mümkün müdür?

b) Hareket hız potansiyelli midir? Hız potansiyelli ise hız potansiyelini bulunuz.

c) Bu akıma ait akım fonksiyonunu belirleyiniz.

d) a = 1 için, M(1, 1) noktasında, akımın hız ve ivme bileşenleri ile bileşke hızını ve bileşke ivmesini belirleyiniz.

ÇÖZÜMÜ

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ olmalı , $-2a + 2a = 0$, akım mümkündür.

b) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ olmalı , $0 = 0$, hız potansiyelli.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2ax \ , \quad \phi_1 = -ax^2 + c_1(y)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2ay \ , \quad \phi_2 = ay^2 + c_2(x)$$

Hız potansiyeli; $\phi = a(y^2 - x^2) + c_1(y) + c_2(x)$

dir.

c) $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -2ax \ , \quad \psi_1 = -2axy + c_1(x)$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ay \ , \quad \psi_2 = -2axy + c_2(y)$$

Akım fonksiyonu;

$$\psi = -2axy + c_1(x) + c_2(y)$$

olur.

d) $a = 1$ için $u = -2x$, $v = 2y$

M(1, 1) için

$$u = -2 \ , \ v = 2 \ , \ \vec{V} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \ , \ V = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \text{ L/T}$$

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= -2(-2) + 2(0) + 0 = +4 \text{ L/T}^2$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= -2(0) + 2(2) + 0 = +4 \text{ L/T}^2$$

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} \ , \ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \text{ L/T}^2$$

elde edilir.

PROBLEM 7.4. İki boyutlu bir akımda sıkışmayan bir akışkan için,

$$u = -\frac{x}{x^2+y^2} \ , \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

ile belirlenen hız dağılımının süreklilik şartını sağladığını gösteriniz. Bu akım hız potansiyellimidir? Akım çizgilerinin denklemini belirleyiniz. Bileşke hız nedir?

ÇÖZÜMÜ

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ ,$$

$$u = -\frac{x}{x^2+y^2} \ , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v = -\frac{y}{x^2+y^2} \ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Türevlerin toplamı sıfır olmaktadır. Süreklilik denklemini sağlamaktadır.

Akımın hız potansiyelli olabilmesi için,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

Birbirine eşittir. Akım çevrintisiz, hız potansiyellidir.

Akım çizgisinin teğetinin eğimi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad , \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad , \quad \text{Lny} = \text{Lnx} + c$$

$$\text{Lny} - \text{Lnx} = c \quad , \quad \text{Ln}\frac{y}{x} = c \quad , \quad \frac{y}{x} = e^c$$

$\frac{y}{x}$ = sabit, $y = kx$ akım çizgisi denklemidir.

Bileşke hız,

$$V^2 = u^2 + v^2 \quad , \quad V^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2}$$

$V = \frac{1}{r}$ elde edilir.

PROBLEM 7.5. İki boyutlu bir akımda hız alanı $u = 2xy - t^2$ ve $v = x^2 - y^2 + 10t$ verilmiştir.

a) **Bu akım fizik olarak mümkünmüdür?**

b) **Bu akım permananmıdır?**

c) **Bu akım hız potansiyellimidir? Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonunu bulunuz.**

d) **Bu akımın akım fonksiyonunu belirleyiniz.**

e) **Bu akım alanında A(1, 1) m noktasında ve t = 1 s için hız ve ivme bileşenleri ile bileşke hızı ve ivmeyi hesabediniz.**

ÇÖZÜMÜ

a) Süreklilik denklemini sağlaması gerekir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

$2y - 2y = 0$, Fizik olarak mümkündür.

b) $$\frac{\partial u}{\partial t} = -2t \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 10 \neq 0$$

akım permanan değildir.

c) Çevrintisizlik koşulu,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

sağlanmalıdır.

$$2x = 2x$$

Akım hız potansiyellidir.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy - t^2 \quad , \quad \phi_1 = x^2y - t^2x + \text{sabit}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - y^2 + 10t \quad , \quad \phi_2 = x^2y - \frac{y^3}{3} + 10\,ty + \text{sabit}$$

$$\phi = x^2y - t^2x - \frac{y^3}{3} + 10\,ty + \text{sabit}$$

potansiyel fonksiyonu elde edilir.

d) $$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy - t^2 \quad , \quad \psi = xy^2 - t^2y + \text{sabit}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = x^2 - y^2 + 10t \quad , \quad \psi = -\frac{x^3}{3} + y^2x - 10\,tx + \text{sabit}$$

$$\psi = xy^2 - t^2y - \frac{x^3}{3} - 10\,tx + c \quad \text{(Akım fonksiyonu)}$$

e) A(1, 1) m ve t = 1 s için

$u = 2xy - t^2 = 1$ m/s

$v = x^2 - y^2 + 10t = 10$ m/s

$$a_x = \frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_x = u \times 2y + v \times 2y - 2t$$

$$a_x = 1 \times 2 + 10 \times 2 - 2 = 20 \ \ m/s^2$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_y = u \times 2x - v \times 2y + 10$$

$$a_y = 1 \times 2 - 10 \times 2 + 10 = -8 \ \ m/s^2$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{1^2 + 10^2} = 10{,}05 \ m/s \ \text{Bileşke hız}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{20^2 + 8^2} = 21.54 \ \ m/s^2 \ \ \text{Bileşke ivme}$$

elde edilir.

PROBLEM 7.6. Mükemmel bir akışkanın 2 boyutlu akımında h[ız] bileşenleri

$$u = (4x^3 - 12 \times y^2)t \quad , \quad v = (-12x^2y + 4y^3)t$$

dir. Bu akımın,

a) Permanan olup olmadığını gösteriniz.

b) Fizik olarak gerçekleşmesinin mümkün olup olmadığını sapt[ayı]nız.

c) Hız potansiyelli olup olmadığını inceleyiniz.

d) Akım çizgilerinin denklemini belirleyiniz. x = 1 ve y = 2 nokt[a]sından geçen akım çizgisinin denklemini bulunuz.

e) Eşit potansiyel çizgilerinin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜMÜ

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} \neq 0 \quad , \quad \dfrac{\partial v}{\partial t} \neq 0$ Akım permanan değil

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = (12x^2 - 12y^2)t$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (-12x^2 + 12y^2)t$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, Akım fizik olarak mümkündür.

c) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ olmalıdır.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -24xyt$$

Akım hız potansiyellidir.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -24xyt$$

d) $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v}$

$$\frac{dx}{(4x^3 - 12xy^2)t} = \frac{dy}{(-12x^2y + 4y^3)t}$$

$$(4x^3 - 12xy^2)\,dy = (-12x^2y + 4y^3)\,dx$$

$$4x^3y - 4xy^3 = -4x^3y + 4y^3x + c$$

$x = 1$ ve $y = 2$ için,

$$4\times1\times2 - 4\times1\times8 + 4\times1\times2 - 4\times8\times1 = c$$

$$c = -48$$

$$8x^3y - 8xy^3 + 48 = 0$$

$x^3y - xy^3 + 6 = 0$ Akım çizgisi denklemi bulunur.

e) $u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = (4x^3 - 12xy^2)t \quad , \quad \phi_1 = (x^4 - 6x^2y^2)t + c_1$

$v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = (-12x^2y + 4y^3)t \quad , \quad \phi_2 = (-6x^2y^2 + y^4)t + c_2$

[Po]tansiyel fonksiyonu $\phi = (x^4 + y^4 - 6x^2y^2)t + c$

$$\phi = \text{fonk}(x, y, t)$$

[bu]lunur.

PROBLEM 7.7. Akım fonksiyonu $\psi = 3x - 2y$ olarak verilen akım,

a) Akım hız potansiyelli midir? Hız potansiyelli ise potansiyel fonksiyonu belirleyiniz.

b) Bu akım fizik olarak mümkünmüdür?

c) Bu akım permananmıdır? → dairmi!

ÇÖZÜMÜ

a) Akımın hız bileşenleri ϕ potansiyel fonksiyonu, ψ akım fonksiyonu olmak üzere,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -3$$

Çevrintisizlik koşulu,

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ gerçekleşir, akım hız potansiyellidir.

Potansiyel fonksiyonu,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2 \quad , \quad \phi_1 = -2x + c_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -3 \quad , \quad \phi_2 = 3y + c_2$$

$$\phi = -2x + 3y + c$$

olarak elde edilir.

b) Akımın fizik olarak mümkün olabilmesi için süreklilik denklemi ni sağlamalıdır.

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, Akım fizik olarak mümkündür.

c) Akımın u ve v hız bileşenleri zamana, t ye, bağlı olmadığından akım permanandır.

PROBLEM 7.8. İki boyutlu bir akımın hız bileşenleri,

$$u = -\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad v = -A\frac{y}{x^2+y^2}$$

dir. Burada Q akımın debisi olup sabittir.

a) Bu akımın fizik olarak gerçekleşebilmesi için A ne olmalıdır?

b) Bu akım permananmıdır?

c) A için bulduğunuz değeri kullanarak, bu akımın hız potansiyelli olup olmadığını belirleyiniz. Hız potansiyelli ise, potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

d) $\frac{Q}{2\pi} = 1$ alarak ve A için bulduğunuz değeri kullanarak, M(1, 1) noktasındaki hız ve ivme bileşenleri ile, bileşke hızı ve ivmeyi belirleyiniz.

ÇÖZÜMÜ

a) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ olmalıdır.

$$-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - A\left[\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0$$

$$-\frac{Q}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)} = A\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \quad , \quad A = \frac{Q}{2\pi}$$

bulunur.

b) $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ Akım permanandır.

c) $u = -\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ ise akım hız potansiyellidir.

$-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] = -\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$ Akım hız potansiyellidir.

Potansiyel fonksiyonu $\phi(x, y)$ ise,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad \phi_1 = -\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x^2+y^2) + c_1$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \phi_2 = -\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x^2+y^2) + c_2$$

$$\phi = -\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x^2+y^2) + c$$

elde edilir.

d) $\frac{Q}{2\pi} = 1$ için, $u = -\frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

M(1, 1) noktasında,

$$u = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2} \text{ birim}$$

$$v = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2} \text{ birim}$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{birim}$$

$$\vec{V} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\left[\frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \frac{y}{x^2+y^2}\left[\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] + 0$$

$$a_x = \frac{-x(x^2-y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{0 - 2\times 1\times 1}{(1+1)^3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} \quad \text{birim}$$

$$a_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= -\frac{x}{x^2+y^2}\,\frac{2xy}{(x^2+y^2)} - \frac{y}{x^2+y^2}\left[\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] + 0$$

$$a_y = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^3} - \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{2}{8} - 0 = -\frac{1}{4} \quad \text{birim}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{birim}$$

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$$

elde edilir.

PROBLEM 7.9. İki boyutlu bir akım $u = 4y$ (m/s), $v = 4x$ (m/s) hız bileşenleri ile verilmiştir. A(0, 0) noktasında basınç yüksekliği 3 m dir. Bu akımın hız potansiyelli olup olmadığını araştırınız. B(2m, 2m) noktasındaki basınç yüksekliğini,

a) x ve y eksenleri yatay iken,

b) x ekseni yatay, y ekseni düşey iken ayrı ayrı belirleyiniz.

ÇÖZÜMÜ

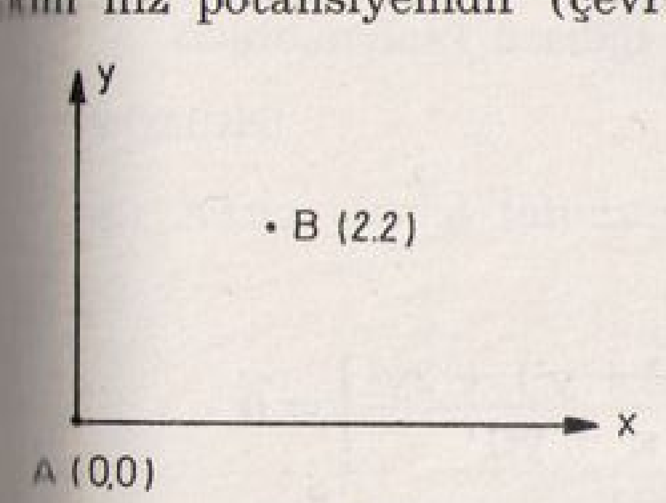
Akımın hız potansiyelli olması için,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

olmalıdır.

$$u = 4y \;,\; \frac{\partial u}{\partial y} = 4 \;,\; v = 4x \;,\; \frac{\partial v}{\partial x} = 4 \;,\; 4 = 4$$

Akım hız potansiyellidir (çevrintisiz akımdır).



Şekil 7.1

a) x ve y yatay düzlemde iken, A(0, 0) noktasında

$$u = 4y = 0 \;,\; v = 4x = 0$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = 0$$

B(2, 2) noktasında,

$$u = 4y = 8 \text{ m/s} \;,\; v = 4x = 8 \text{ m/s}$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{64 + 64} = 11{,}31 \text{ m/s}$$

A ile B noktaları arasında Bernoulli denklemini yazarsak,

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$0 + 3 + 0 = 0 + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{(11{,}31)^2}{19{,}62} \;,\; \frac{p_B}{\gamma} = -3{,}52 \text{ m.}$$

bulunur.

b) x ekseni yatay, y ekseni düşey iken

$$Z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$0 + 3 + 0 = 2 + \frac{p_B}{\gamma} + 6{,}52$$

$$\frac{p_B}{\gamma} = -5{,}52 \text{ m.}$$

bulunur.

PROBLEM 7.10. Bir akımda hız bileşenleri şu ifadelerle verilmiştir.

$$u = -\frac{kx}{x^2+y^2}\,t \;,\; v = -\frac{y}{x^2+y^2}\,t$$

a) Bu akımın süreklilik şartını gerçeklemesi için k ne olmalıdır?

b) Bu akım permananmıdır?

c) Bu akımda yörüngelerle akım çizgileri çakışır mı? Yanıtınızı nedenlerini ayrıntılı olarak açıklayınız. Bunların denklemlerini çıkarınız.

ÇÖZÜMÜ

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

olmalıdır.

$$t\left[\frac{-k(x^2+y^2)+2kx^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0$$

$$-kx^2 - ky^2 + 2kx^2 - x^2 - y^2 + 2y^2 = 0$$

$$kx^2 - ky^2 - x^2 + y^2 = 0$$

$$k(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2) = 0$$

$$(x^2 - y^2)(k-1) = 0 \quad , \quad k = 1$$

olmalıdır.

b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} \neq 0 \quad , \quad \dfrac{\partial v}{\partial t} \neq 0$

olduğundan akım permanan değildir.

c) $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v} \quad , \quad \dfrac{dx}{-\dfrac{xt}{x^2+y^2}} = \dfrac{dy}{-\dfrac{yt}{x^2+y^2}}$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad , \quad \text{Lnx} = \text{Lny} + c$$

$$\text{Ln}\frac{x}{y} = c \quad , \quad \frac{x}{y} = e^c = k$$

Hızlar t nin homotetik fonksiyonu olduğundan yörünge ile akım çizgileri çakışır.

PROBLEM 7.11. İki boyutlu sürtünmesiz ve sıkışmaz bir akımda akım fonksiyonu $\psi = -2axy$ tir.

a) Bu akım fizik olarak mümkünmüdür?

b) Bu akım hız potansiyellimidir? Hız potansiyelli ise, potansiyel fonksiyonununu belirleyiniz.

c) $\psi_1 = -4a$ ve $\psi_2 = -8a$ için akım çizgilerini ve $\phi = 0$, $\phi = \mp 4a$, $\phi = \mp 8a$ eşpotansiyel çizgilerini çiziniz.

d) $\phi = 0$ eşit potansiyel çizgisi ile $\psi_1 = -4a$ akım çizgisinin kesişme noktasındaki özelliği belirtiniz.

ÇÖZÜMÜ

a) Akım çizgisi tanımından

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2ax$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = +2ay$$

elde edilir. Süreklilik denkleminden

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad -2a + 2a = 0$$

bulunur. Bu nedenle akım fizik olarak gerçekleşebilir.

b) Çevri vektörünün 0 Z e paralel bileşeni sıfıra eşitse akım hız potansiyellidir

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 - 0 = 0$$

koşulu gerçekleştiğinden akım hız potansiyellidir

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2ax \quad \text{integrasyonla} \quad \phi_1 = -ax^2 + c_1 \qquad (1)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \quad 2ay \quad \text{integrasyonla} \quad \phi_2 = +ay^2 + c_2 \qquad (2)$$

bulunur. Burada $c_1 = f(y) + (\text{sabit})_1$

$c_2 = g(x) + (\text{sabit})_2$

şeklindedir. (1) ve (2) birlikte göz alınarak

$$f(y) = ay^2 \quad , \quad g(x) = -ax^2$$

olduğundan c herhangi bir sabiti göstermek üzere

$$\phi = a(y^2 - x^2) = c$$

elde edilir.

$$\phi_0 = 0 \quad , \quad y = x$$

olur.

c) $\psi = -2axy$

olarak verilmiştir.

$$\psi_1 = -4a \quad \text{için} \quad xy = 2 \qquad y = \frac{2}{x}$$

$$\psi_2 = -8a \quad \text{için} \quad xy = 4 \qquad y = \frac{4}{x}$$

bulunur.

$$\phi = a(y^2 - x^2) \quad \text{den}$$

$$\phi_1 = +4a \quad \text{için} \quad y^2 - x^2 = 4 \quad , \quad y = \sqrt{x^2+4}$$

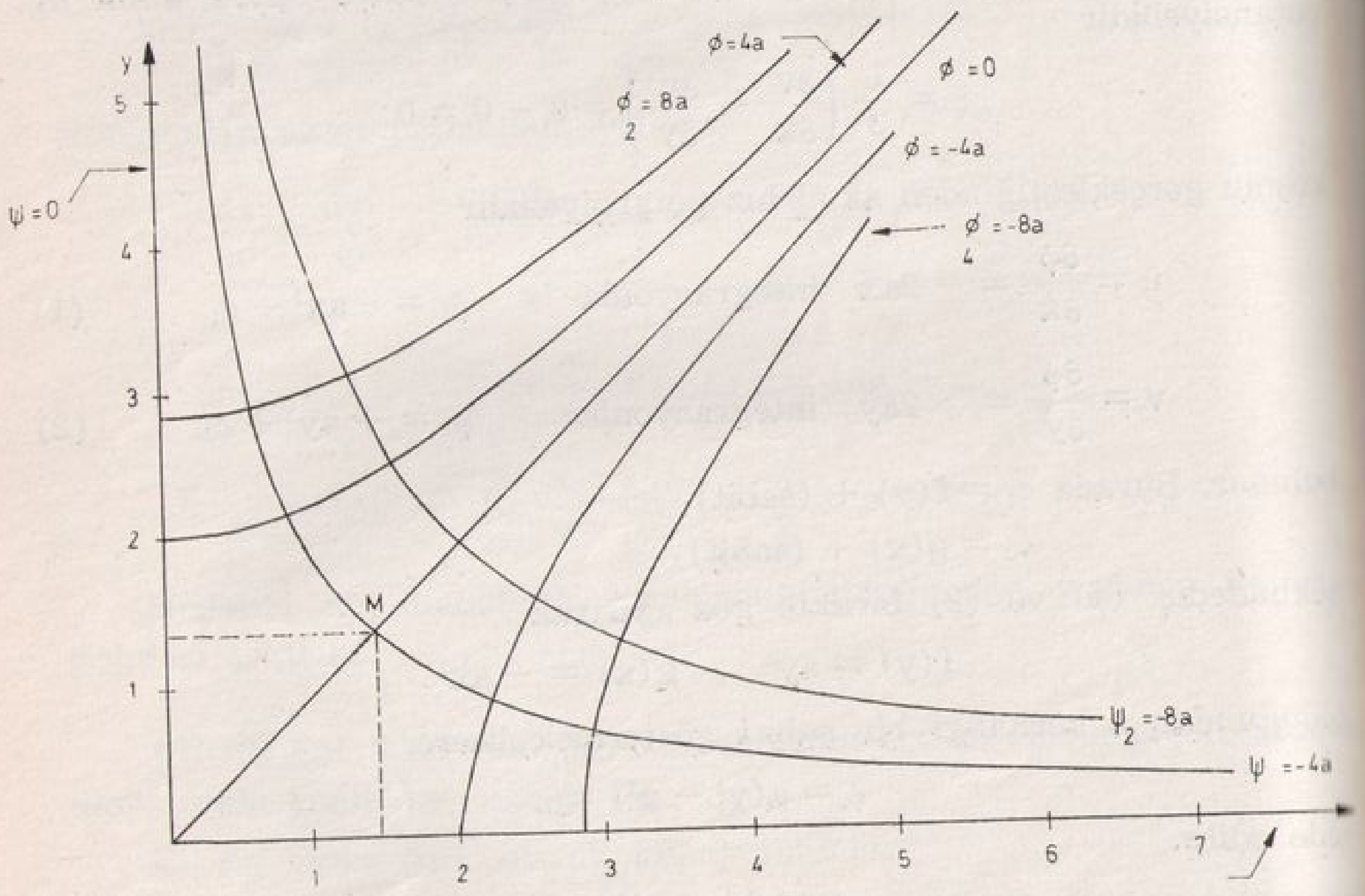
$$\phi_2 = +8a \quad \text{için} \quad y^2 - x^2 = 8 \quad , \quad y = \sqrt{x^2+8}$$

$$\phi_3 = -4a \quad \text{için} \quad y^2 - x^2 = -4 \quad , \quad y = \sqrt{x^2-4}$$

$$\phi_4 = -8a \quad \text{için} \quad y^2 - x^2 = -8 \quad , \quad y = \sqrt{x^2-8}$$

elde edilir.

x e verilen değerlerle aşağıdaki şekil hazırlanmıştır.



Şekil 7.2

$\psi = 0$

d) $\psi_1 = -4a$ için akım çizgisi $y = \frac{2}{x}$ ile

$\phi = 0$ için $y = x$ eşit potansiyel çizgisi koordinatları $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ olan M noktasında kesişirler.

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{için} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = m_1 = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = x \quad \text{için} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = m_2 + 1$$

dir. $M(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ noktasında

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -1 \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = +1$$

olduğundan

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

olur. O halde akım çizgisi ile eşit potansiyel çizgileri dik kesişirler.

PROBLEM 7.12. Polar koordinatlarda akım çizgileri denklemi

$$\psi = r^2 \sin 2\theta$$

olan mükemmel akışkan hareketi :

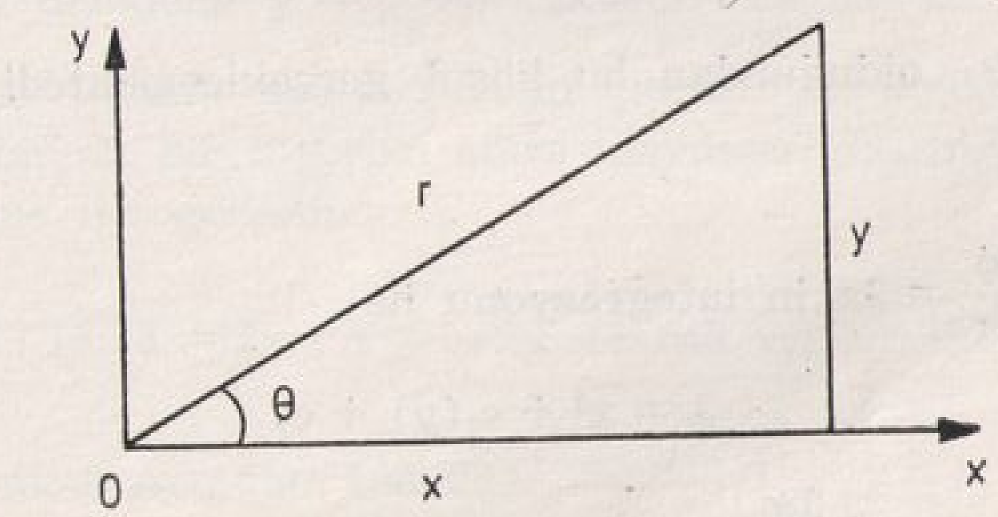
a) permanan bir hareketmidir?

b) süreklilik denklemini sağlarmı?

c) hız potansiyelli midir?

d) eşit potansiyel çizgilerinin denklemi belirlenebilirmi?

e) fizik olarak pratikte nasıl gerçekleşebilir?



Şekil 7.3

ÇÖZÜMÜ

Polar kordinatta

$$\psi = r^2 \sin 2\theta$$

olan akım çizgisi, kartezyen koordinatta

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\sin\theta \ , \quad r^2 = x^2 + y^2$$

dır.

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

olduğundan,

$$\psi = (x^2 + y^2)\left(2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 2yx$$

e dönüşür.

a) – Hız bileşenleri

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2x \ , \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2y$$

olup

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

hareket permanandır.

b) – Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2 = 0$$

gerçekleşir.

c) – İki boyutlu akımda $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ ise hareket hız potansiyellidir. $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ olduğundan bu koşul gerçekleşmektedir. Hareket hız potansiyellidir.

d) $u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x$ in integrasyonu ile

$$\phi = x^2 + c_1(y) + c_2 \qquad (1)$$

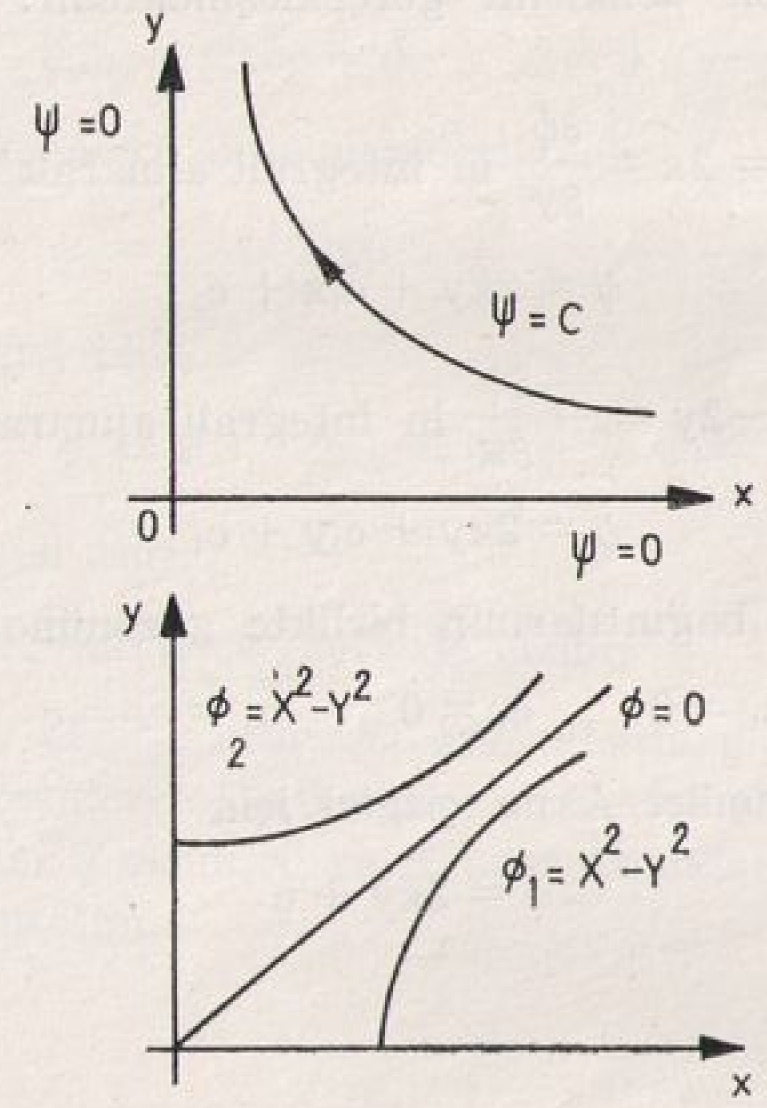
$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y$ in integrasyonu ile

$$\phi = -y^2 + c_3(x) + c_4 \qquad (2)$$

ile elde edilir. (1) ve (2) nin birlikte göz önünde tutulmasile, eşit potansiyel çizginin denklemi

$$\phi = x^2 - y^2 = c$$

olarak elde edilir.



Şekil 7.4

e) 90° lik bir dirsekte oluşan iki boyutlu ideal akışkan akımında akım çizgilerinin denklemi $y = \frac{c}{2x}$ şeklindedir. Bunlar bir hiperbol ailesi oluşturur. Aynı akımda eşit potansiyel çizgilerinin denklemi $x^2 - y^2 = c$ şeklindedir. Bunlar da bir hiperbol ailesi meydana getirir. Bu iki hiperbol ailesi birbirine ortogonaldir.

PROBLEM 7.13 $u = 2x$, $v = -2y$ **olarak verilen iki boyutlu akım için :**

a) Akım fonksiyonunu bulunuz.

b) Akım çizgilerini çiziniz.

c) $\Delta\psi =$ sabit için q ların aynı olduğunu gösteriniz.

d) Bu akımın hız potansiyelli olup olmadığını araştırınız.

ÇÖZÜMÜ

a) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2 = 0$$

dir. O halde süreklilik denklemi gerçekleşmektedir. Akım fizik olarak mümkündür.

$$u = 2x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ in integrali alınarak}$$

$$\psi = 2xy + c_1 x + c_2 \quad (1)$$

$$v = -2y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ in integrali alınarak}$$

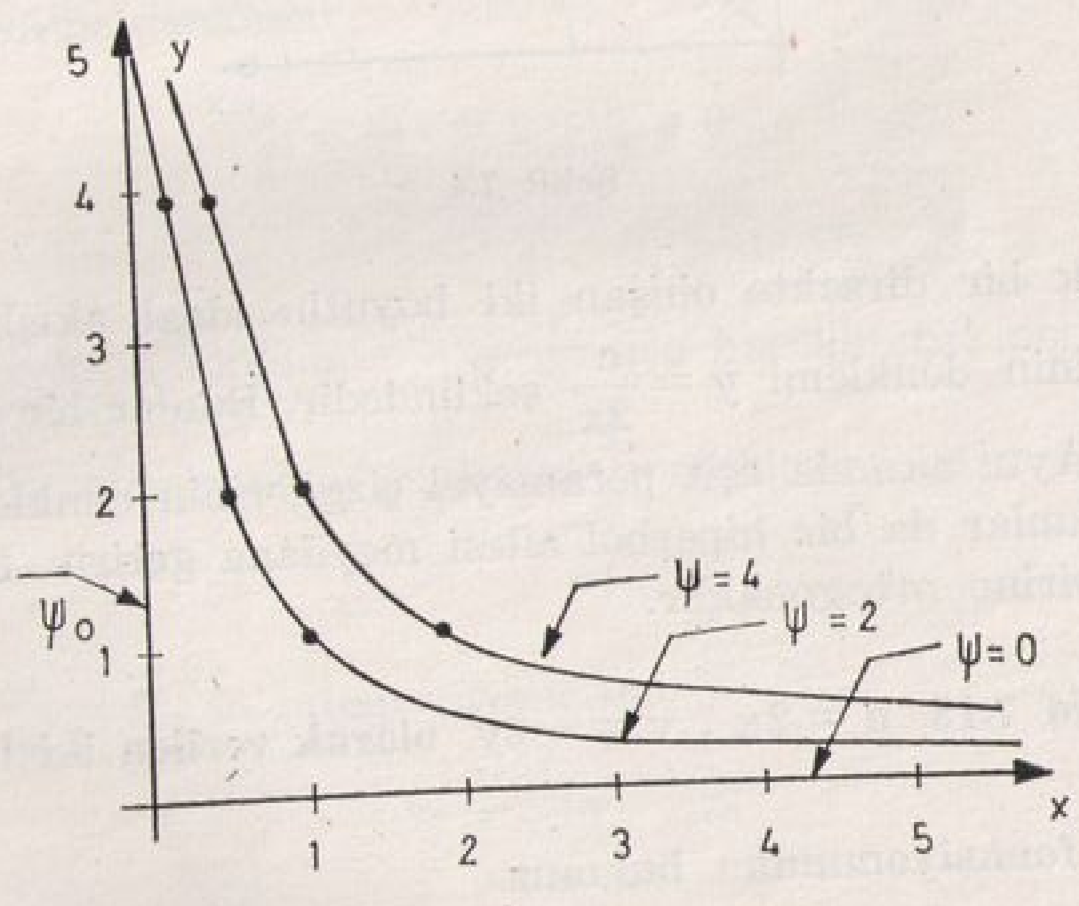
$$\psi = 2xy + c_3 y + c_4 \quad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) bağıntılarının birlikte gözönüne alınmasile

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_3 = 0 \quad , \quad c_2 = c_4 = c$$

olması gerektiği anlaşılır. Akım çizgisi için

$$\psi = 2xy + c$$



Şekil 7.5

...ucu elde edilir. Bu

$$\psi = 2xy = c \quad (3)$$

...linde de yazılabilir.

b) $\psi_0 = 0 \quad , \quad \psi_1 = 2 \quad , \quad \psi_2 = 4$ gibi $\Delta\psi = 2$

...an akım çizgilerini gözönüne alalım.

$$\psi_0 = 0 \text{ için} \quad , \quad 2xy = 0 \quad , \quad x = 0 \text{ veya } y = 0$$

...sis ve ordinat eksenleri akım çizgileri olur.

$$\psi_1 = 2 \quad , \quad 2xy = 2 \quad , \quad y = \frac{1}{x}$$

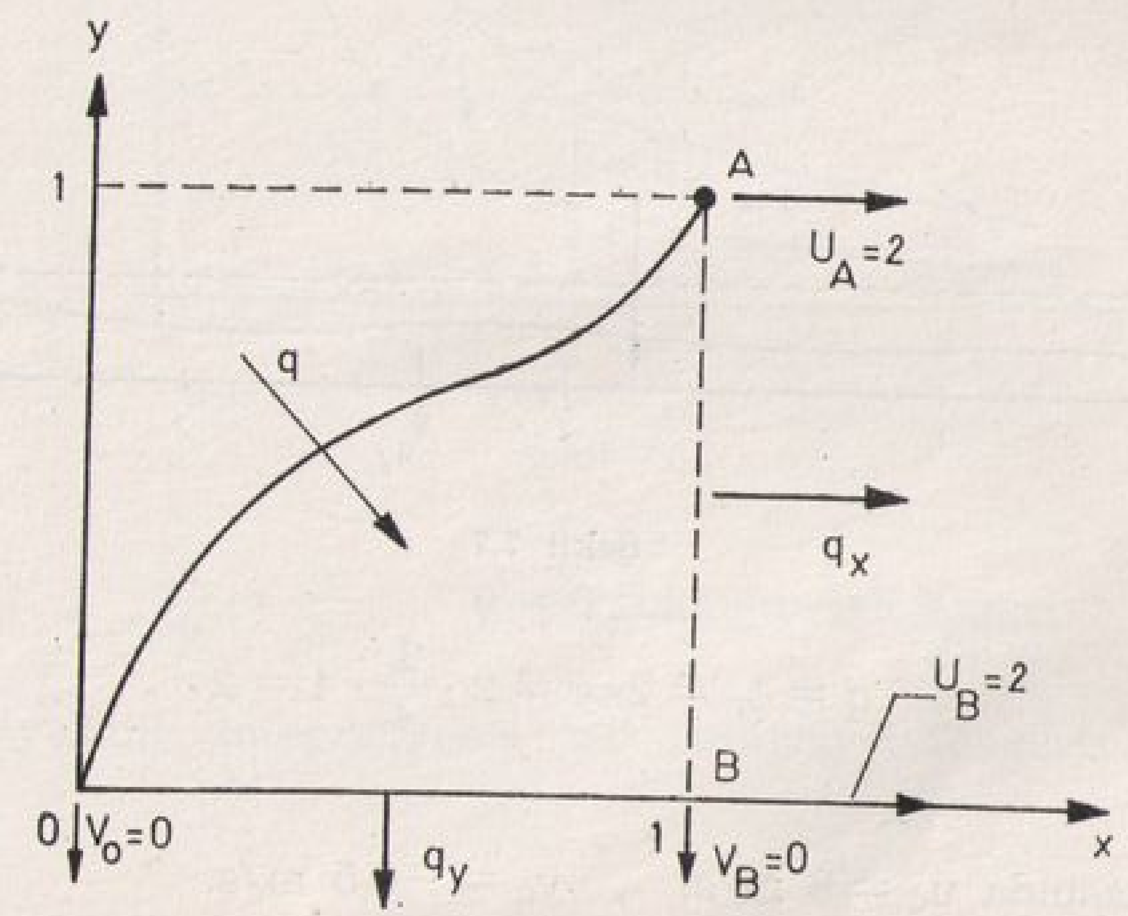
...perbolü akım çizgisi olur.

$$\psi_2 = 4 \quad , \quad 2xy = 4 \quad , \quad y = \frac{2}{x}$$

...perbolü akım çizgisi olur.

Bu şekilde diğer akım çizgileri de çizilir.

c) $\psi_1 = 2$ akım çizgisi üzerinde koordinatları (1, 1) olan nokta A ...un. Koordinat eksenleri $\psi_0 = 0$ akım çizgilerini oluşturmaktadır. Bun... ...ın kesişme noktası 0 olsun. 0 ve A noktalarından geçen herhangi bir ...iyi gözönünde tutalım.



Şekil 7.6

0A eğrisinden geçen debi q olsun (birimi m³/s. dir)

$$q = \psi_A = 2xy = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

olmaktadır.

A noktasında $u_A = 2$ m/s. , $v_A = -2$ m/s. dir.

O noktasında $u_0 = 0$ m/s. , $v_0 = 0$ m/s. dir.

B noktasında $u_B = 2$ m/s. , $v_B = 0$ m/s. dir.

OAB hacmi için süreklilik denklemi

$$q = q_x + q_y$$

şeklinde yazılabilir.

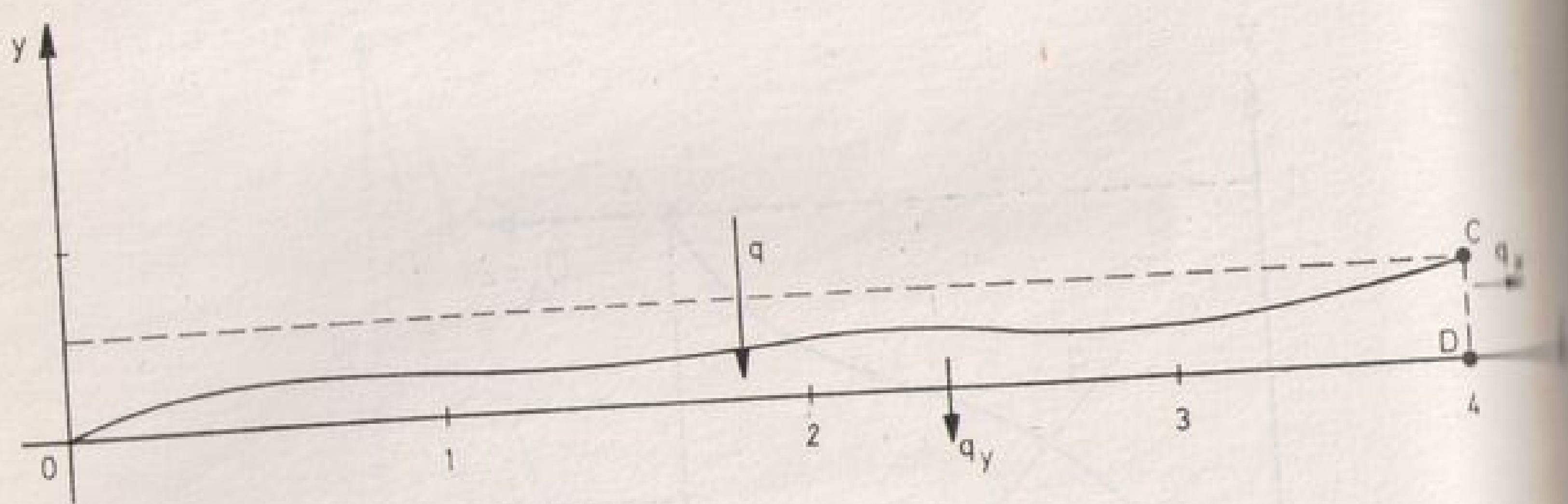
$$q_x = 2 \times 1 = 2 \quad , \quad q_y = 0 \times 1 = 0$$

$$q = 2$$

olduğu gerçeklenmiş olur.

Bu defa $\psi_1 = 2$ akım çizgisi üzerinde koordinatları $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ ol... bir eğriyi gözönünde tut... nokta C olsun. O ve C den geçen herhangi bir eğriyi gözönünde tu... lım.

OC eğrisinden geçen debi q olsun.



Şekil 7.7

$$q = \psi_C = 2xy = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = 2$$

olmaktadır.

C noktasında $u_C = 8$ m/s. , $v_C = -0{,}5$ m/s.

D noktasında $u_B = 8$ m/s. , $v_B = 0$ m/s.

OCD hacmi için süreklilik denklemi

$$q = q_x + q_y$$

şeklinde yazılabilir.

$$q_x = \frac{1}{4} \times 8 = 2 \quad , \quad q_y = 4 \times 0 = 0$$

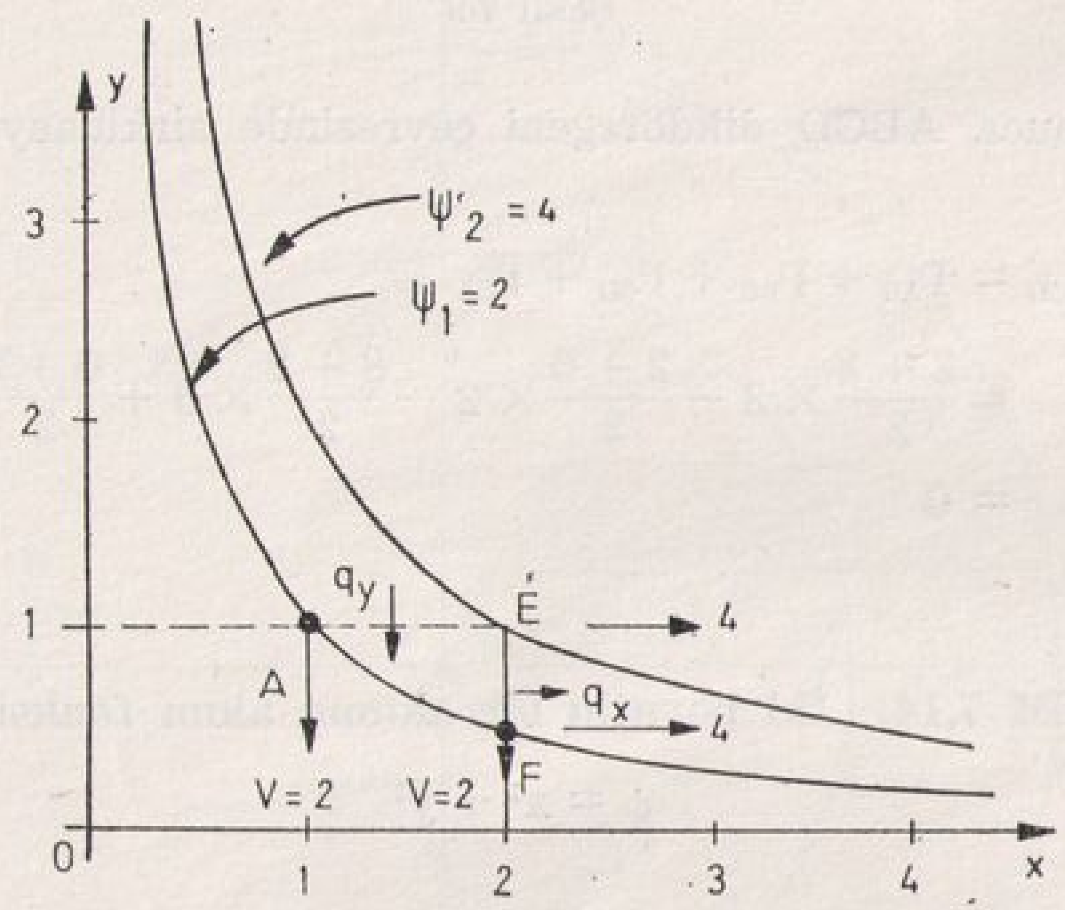
$$q = 2$$

olduğu yinelenmiş olur. Aynı şekilde $\psi_1 = 2$, $\psi_2 = 4$ akım çizgileri arasındaki AEF hacmine, AE den giren q_y debisi EF den çıkan q_x debisine eşit olduğu görülür. Gerçekten,

$$q_x = u \cdot dy = 4 \times 0{,}5 = 2 = \Delta\psi = 4 - 2 = 2$$

$$q_y = v \cdot dx = 2 \times 1 = 2 = \Delta\psi$$

dir.



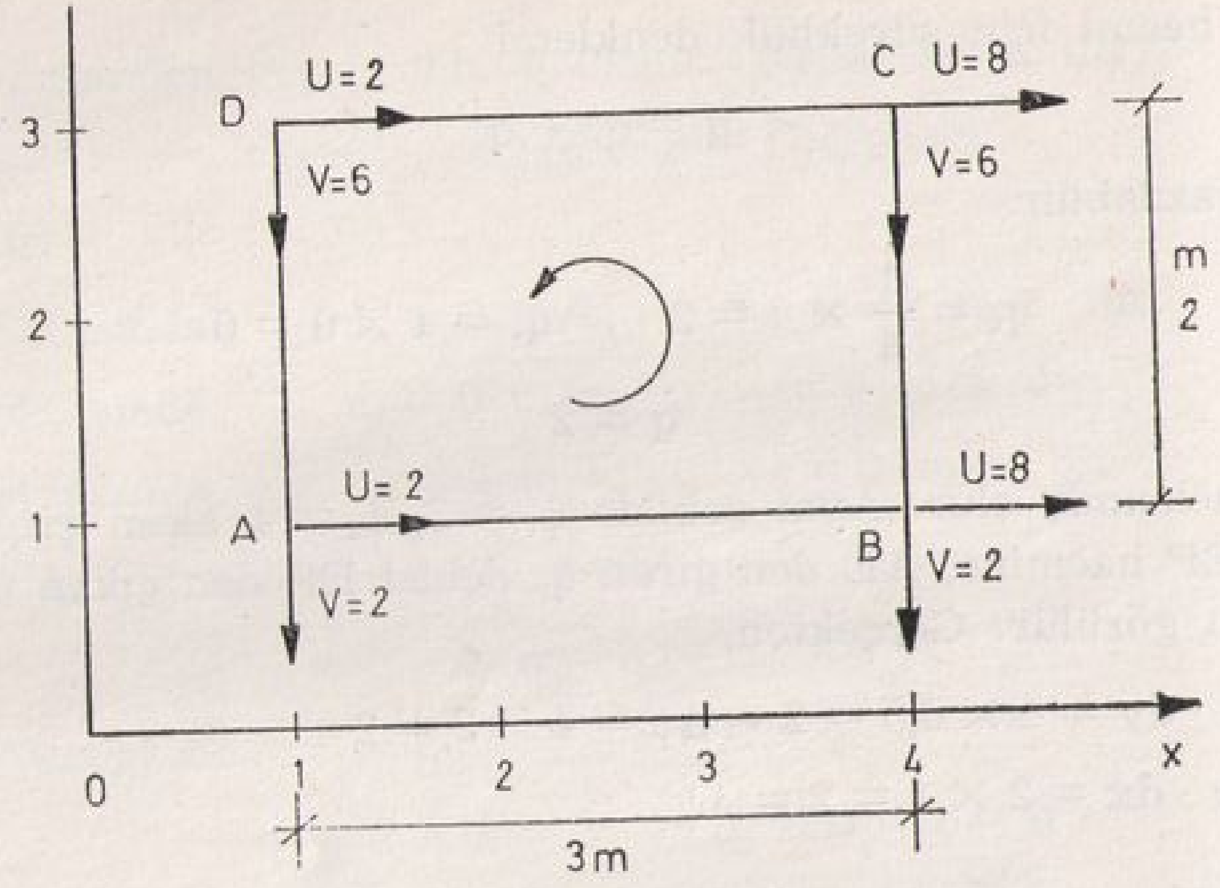
Şekil 7.8

d) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $0 = 0$ olduğundan akım

potansiyellidir. İntegrasyonla eşit potansiyel fonksiyonun

$$\phi = x^2 - y^2 = c$$

olduğu bulunur.



Şekil 7.9

Aynı sonuca ABCD dikdörtgeni çevresinde sirkülasyonun sıfır hesabı ile de

$$\phi_{ABCD} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA}$$

$$= \frac{2+8}{2} \times 3 - \frac{2+6}{2} \times 2 - \frac{8+2}{2} \times 3 + \frac{6+2}{2} \times 2$$

$$= 0$$

varılabilir.

PROBLEM 7.14. İki boyutlu bir akımın akım fonksiyonu

$$\psi = x^2 + y^2$$

dir.

a) Akım çizgilerini çiziniz.

b) $\Delta\psi = \Delta q$ olduğunu gösteriniz.

c) Akımın çevrintili olup olmadığını araştırınız.

ÇÖZÜMÜ

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2y \quad , \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -2x \text{ dir.}$$

a) $\psi_0 = 0$ için $x = 0$, $y = 0$ olur.

Akım çizgisi O noktasından ibarettir.

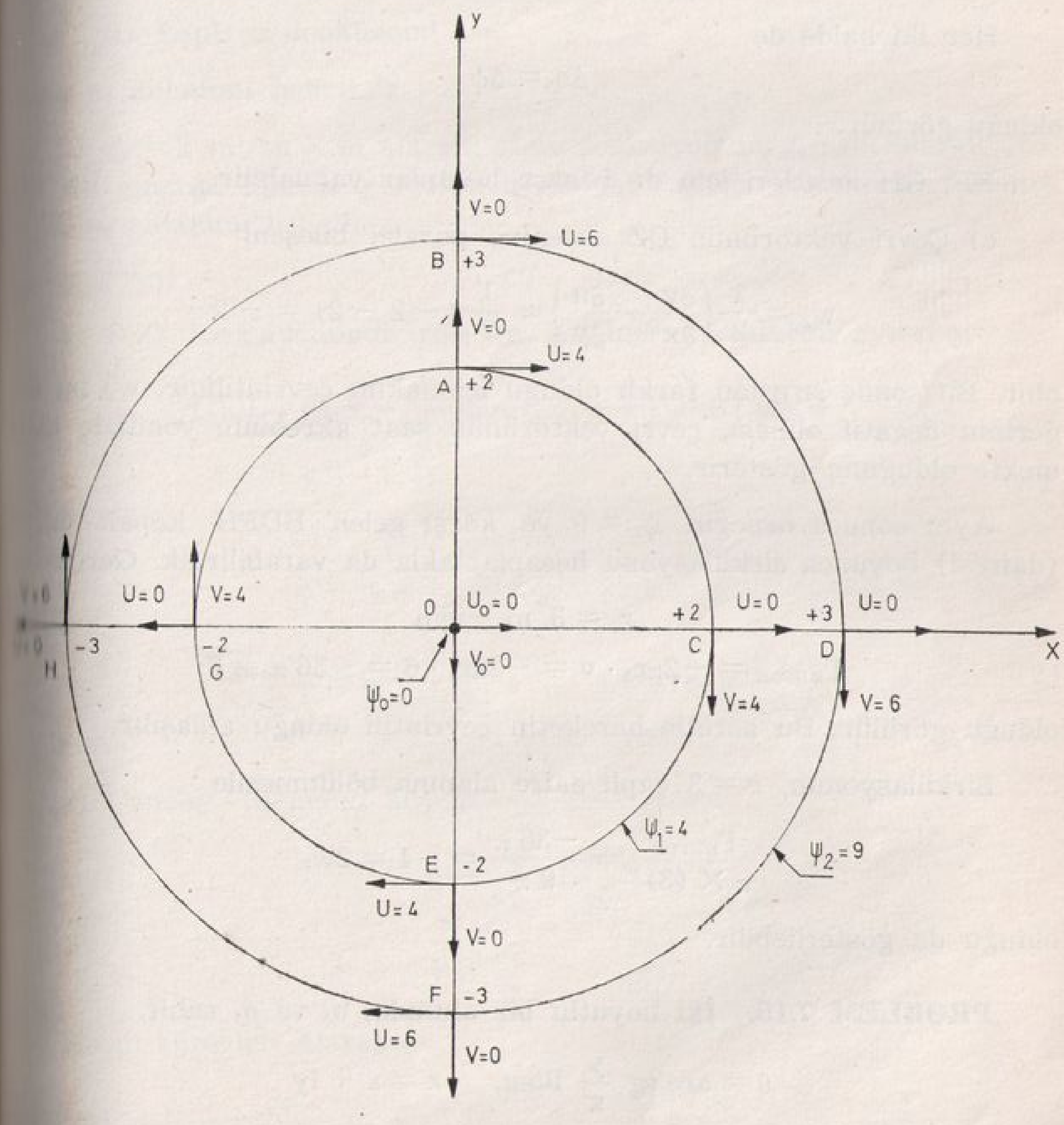
$$\psi_1 = 4 \quad \text{için} \quad x^2 + y^2 = 4$$

Akım çizgisi 0 merkezli r = 2 m. yarıçaplı dairedir.

$$\psi_2 = 9 \quad \text{için} \quad x^2 + y^2 = 9$$

Akım çizgisi 0 merkezli r = 3 m. yarıçaplı dairediri

$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = 9 - 4 = 5$ (birimi m³/s. dir)



Şekil 7.10

ψ_2, ψ_1 akım çizgilerinin y ekseni üzerindeki AB kesitinden geç[en]
debi

$$\Delta q = \overline{AB} \times \frac{u_A + u_B}{2} = (3-2)\frac{6+4}{2} = 5 \ m^3/s. \ \text{dir.}$$

Aynı şekilde ψ_2, ψ_1 akım çizgilerinin x ekseni üzerindeki CD ke[si]tinden geçen debi

$$\Delta q = \overline{CD} \times \frac{v_C + v_D}{2} = (3-2)\ \frac{4+6}{2} = 5 \ m^3/s. \ \text{olur.}$$

Her iki halde de

$$\Delta q = \Delta\psi$$

olduğu görülür.

EF, GH kesitleri için de benzer hesaplar yapılabilir.

c) Çevri vektörünün OZ eksenine paralel bileşeni

$$w_Z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(-2-2) = -2$$

olur. Bu sonuç sıfırdan farklı olduğu için akım çevrintilidir. w_Z im[...] ğerinin negatif olması, çevri vektörünün saat akrebinin yönünde et[ki]mekte olduğunu gösterir.

Aynı sonuca örneğin $\psi_2 = 9$ ye karşı gelen BDFH kapalı eğri[si] (dairesi) boyunca sirkülasyonu hesaplamakla da varabilirdik. Gerçekte[n]

$$r_2 = 3 \ \text{m.} \quad \text{için}$$

$$\Gamma_{BHFDB} = -2\pi r_2 \cdot v = -2\pi r_2 \cdot 6 = -36\,\pi \neq 0$$

olduğu görülür. Bu suretle hareketin çevrintili olduğu anlaşılır.

Sirkülasyonun, r = 3 çaplı daire alanına bölünmesile

$$\frac{\Gamma_{BHFDB}}{\pi \times (3)^2} = \frac{-36\,\pi}{9\,\pi} = -4 = 2w_Z$$

olduğu da gösterilebilir.

PROBLEM 7.15. İki boyutlu bir akımda, u_0 ve q_0 sabit,

$$\theta = \text{arc tg}\ \frac{y}{x} \ \textbf{iken,} \quad z = x + iy$$

kompleks değişkeninin

$$f(z) = u_0(x+iy) + \frac{q_0}{2\pi}\log_e[(\sqrt{x^2+y^2})e^{i\theta}]$$

[fo]nksiyonu ile belirlenen akımı için

1) Potansiyel fonksiyonu ve akım fonksiyonunu belirleyiniz. Bu fonksiyonların, sırasile

a) Cauchy-Riemanın koşulunu

b) süreklilik denklemini

c) çevrisiz akım koşulunu

d) Laplace denklemini

[...]m, u_0 anlamını belirtiniz.

2) $q_0 = 2 \ m^3/sn \times m$ alarak, akım fonksiyonunu grafik olarak çizi[ni]z. Bu amaçla, akımın gerçekleşmesindeki özelliği gözönünde tutunuz. [...]m, u_0 anlamını belirtiniz.

ÇÖZÜMÜ

1) f(Z) fonksiyonunun reel ve imajiner kısımlarını ayıralım

$$f(z) = (u_0 x + \frac{q_0}{2\pi}\log_e\sqrt{x^2+y^2}) + i\left(u_0 y + \frac{q_0}{2\pi}\theta\right)$$
$$= \varphi + i\psi$$

[ol]duğundan

$$\varphi = u_0 x + \frac{q_0}{2\pi}\log_e\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1)$$

$$\psi = u_0 y + \frac{q_0}{2\pi}\theta \ , \quad \theta = \text{arc tg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2)$$

[bu]lunur.

a) Cauchy - Riemann koşulu

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

[d]ir. Kısmı türevleri alarak

(1) den $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_0 + \frac{q_0}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{q_0}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$

(2) den $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u_0 + \dfrac{q_0}{2\pi} \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{q_0}{2\pi} \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

olduğundan, φ ve ψ fonksiyonlarının bu koşulu sağladıkları görülür.

b) Süreklilik şartı

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

dir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q_0}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{q_0}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

olduğundan bu koşulun sağlandığı anlaşılır.

c) Çevrisiz akım şartı

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

dir.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{q_0}{2\pi} \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{q_0\, yx}{\pi (x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{q_0}{2\pi} \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{q_0\, yx}{\pi (x^2 + y^2)^2}$$

olduğundan bu koşulun sağlandığı gösterilmiş olur.

a) Laplace denklemi

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

dir.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q_0}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{q_0}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

olup bu koşulun gerçekleştiği (b) kısmında açıklanmıştır. x fonksiyonu için de durum aynıdır.

2) Bu akım

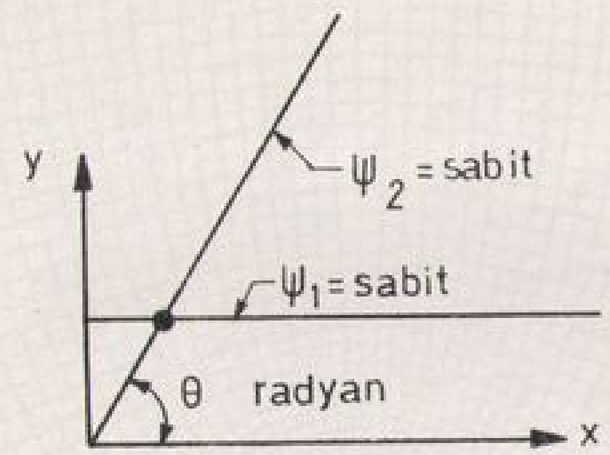
– x doğrultusunda uniform u_0 hızlı bir akımla

– debisi q_0 olan bir kaynağın süperpozisyonu ile elde edilen bir akımdır.

Burada akım çizgilerinin elde edilmesi için

— önce $\psi_1 = u_0\, y$ akım çizgileri çizilir. ψ_1 = sabit eğrileri absis eksenine paralel doğrulardan oluşur.

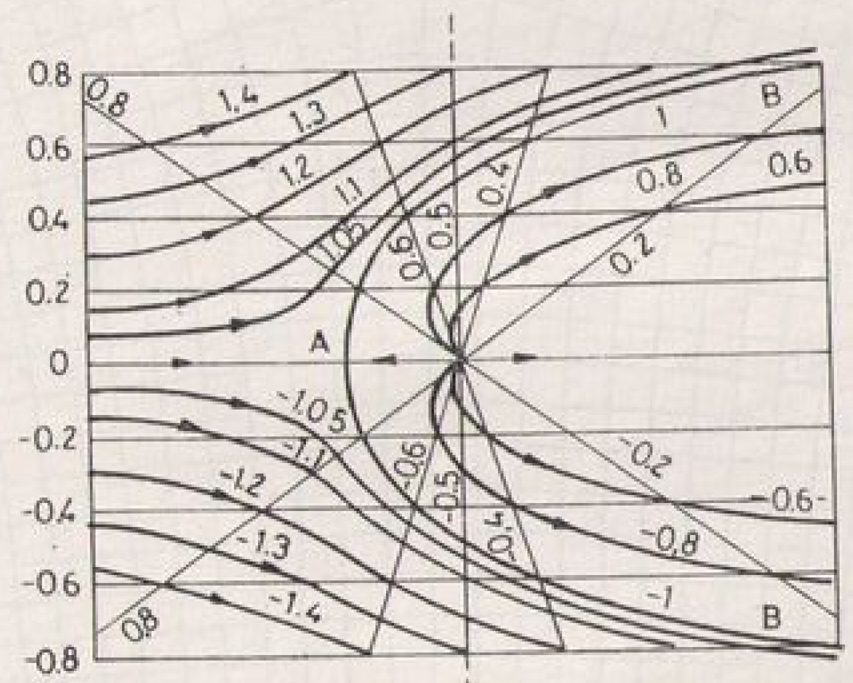
— daha sonra $\psi_2 = \dfrac{q_0}{2\pi}\, \theta$ akım çizgileri çizilir. ψ_2 = sabit eğrileri kaynağın merkezinden geçen ve 0X ile θ radyanlık açı teşkil eden doğrulardır.



Şekil 7.11

ψ_1 ve ψ_2 eğrilerinin kesiştiği noktada $\psi = \psi_1 + \psi_2$ olduğundan, ψ değeri hesaplanmış olur.

Bu suretle bulunan ψ lerin aynı değeri taşıyan noktaların birleştirilmesile akım fonksiyonununun grafik çizimi elde edilmiş olur.

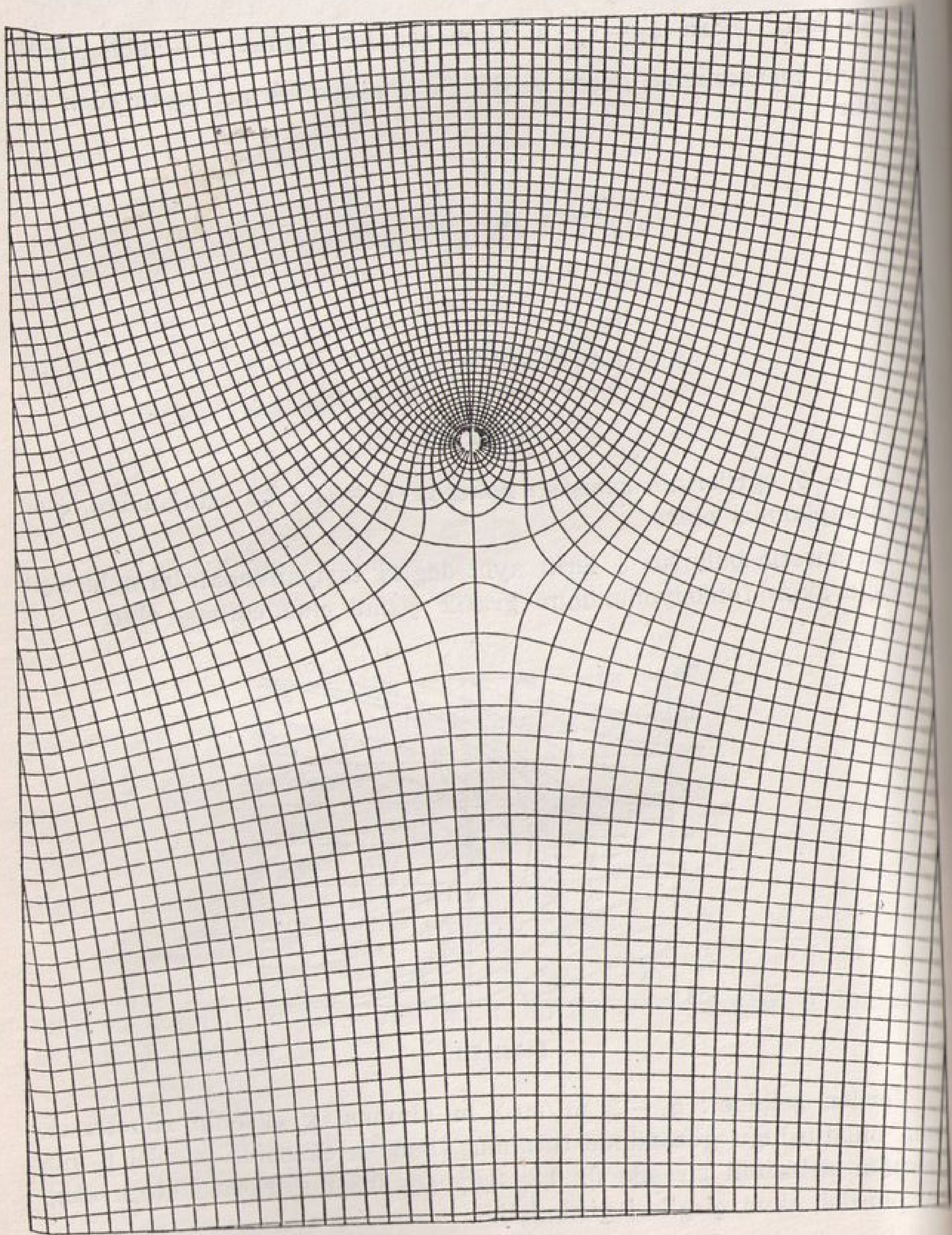


Şekil 7.12

Verilen şekilde : $q_0 = 2\ m^3/sn \times m$ alınmış, x eksenin simetri eksenini oluşturduğu gözönünde tutulmuş, önce x eksenine paralel u_0 hızlı akımın debisinin sırasile 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 değerlerine ait x eksenine paralel akım çizgileri çizilmiştir.

Bundan sonra kaynak denklemine ait

$$\psi_2 = \frac{q_0}{2\pi} \qquad \theta = \frac{\theta}{\pi}$$



Şekil 7.13

...in, debinin 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 1.00 değerlerine karşı gelen akım çizgileri çizilmiştir. Bu iki akım çizgisi ailelerinin kesişme noktalarındaki ...biler toplanarak, süperpoze edilmiş akımın akım çizgileri elde edilmiştir. Şekildeki BAB′ eğrisinin, başlangıçtaki üniform akımı iki bölgeye ayırdığı görülür. ABB′ bölgesinin içinde kaynaktan doğan akım çizgileri bulunur, bu eğrinin dışında, başlangıçtaki üniform akımın akım çizgileri yer alır.

BAB′ denklemi

$$\frac{q_0}{2} = u_0\, y + \frac{q_0}{2\pi}\,\theta$$

olduğundan şekilde

$$1 = u_0\, y + \frac{\theta}{\pi}$$

ye karşı gelir.

x ekseni simetri ekseni olduğundan, akım çizgileri de bu eksene göre simetrik şekildedir.