VIII

1. BOYUT ANALİZİ VE FİZİKSEL BENZERLİK

Bazı mühendislik problemleri çözümlerinin analitik metodlarla yapılamadığı yerde deneylerden elde edilen bilgilere başvurulur. Gerekli deney sayısını minumuma düşürmek için kullanılan teknik, boyut analizidir. Bu yöntemle ilgili değişkenler arasındaki matematiksel bağıntılar hakkında bilgi verilir ve değişkenlerin en etken şekilde gruplanışını gösterilir.

Rayleigh metodu: Bir eğri ailesini tanımlayan ϕ fonksiyonu, ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ... gibi bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu fonksiyonel bağıntı,

$$\phi = \phi (\phi_1 , \phi_2 , \phi_3 , \ldots)$$

olacaktır. Boyut analizi teorisini uygulamak üzere bu bağıntı,

$$\phi = \phi_1^a \cdot \phi_2^b \cdot \phi_3^c \cdot \ \ldots$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin iki yanının boyutlarının aynı olması ilkesi kullanılarak, olayda mevcut ana boyut sayısı kadar denklem elde edilir. Bu denklemlerden gruplaşmalar yapılarak olayın boyutsuz katsayıları bulunur ve bu katsayılarda deneysel yoldan veya fiziksel niteliklerinden elde edilir.

Buckingham'ın π metodu: Bir fiziksel olayda "n" sayıda birbirinden bağımsız A_1 , A_2 , ... A_n büyüklükleri olsun. Bu büyüklükler sayıları "m" olan ana boyutlar cinsinden yazılabilir. Bağımsız büyüklükler (n - m) sayıda boyutsuz gruplar şeklinde düzenlenir ve $\pi_1 , \pi_2 , \pi_3 , \ldots \pi_{n-m}$ olarak gösterilirler. π metodunun matematiksel özeti aşağıdaki gibidir:

$$A_1 = A_1 (A_1 , A_2 , A_3 , \ldots A_n)$$

veya

$$\phi (A_1 , A_2 , A_3 , \ldots A_n) = 0$$

ise her π sayısı (m + 1) adet değişkenli olur ve olay,

$$\phi_1 (\pi_1 , \pi_2 , \pi_3 , \ldots \pi_{n-m}) = 0$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Her bir π grubundaki m adet bağımsız değişkene ($A_1 , A_2 , A_3 , \ldots A_m$)

ortak değişken denir. Böylece her gruba m adet ortak değişken ve bir de diğer gruptakilerde bulunmayan bir ek değişken konulup (n - m) adet boyutsuz grup yazılacaktır:

$$\Pi_1 = A_1^{a_1} \; A_2^{b_1} \; \ldots \; A_m^{m_1} \; A_{m+1}$$

$$\Pi_2 = A_1^{a_2} \; A_2^{b_2} \; \ldots \; A_m^{m_2} \; A_{m+2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Pi_{n-m} = A_1^{a_{n-m}} \; A_2^{b_{n-m}} \; \ldots \; A_m^{m_{n-m}} \; A_n$$

İki sistemde birbirine karşı düşen büyüklükler oranı heryerde aynı olduğu zaman, iki sistemin belirlenen fiziksel büyüklüklere göre fiziksel olarak benzer olacağı söylenilir. Üç tip fiziksel benzerlik vardır:

(1) Geometrik benzerlik: Şekil benzerliğidir ve iki sistemde birbirine karşılık gelen uzunlukların oranları sabittir.

(2) Kinematik benzerlik: Hareket benzerliğidir ve iki sistemde birbirine karşılık gelen hız ve ivmelerin oranları sabittir.

(3) Dinamik benzerlik: Kuvvetlerin benzerliğidir ve iki sistemde birbirine karşılık gelen kuvvetlerin oranları sabittir. Dinamik benzerlikte görülen belli başlı oranlar aşağıda belirtildiği gibidir:

Oranın Tanımı	Oranın Adı	Kuvvetlerin Büyüklük Oranın Gösterilişi	Sembolü
$\dfrac{u \ell \rho}{\mu}$	Reynolds sayısı	$\dfrac{\text{Atalet kuvveti}}{\text{Viskoz kuvveti}}$	Re
$\dfrac{u}{(\ell g)^{1/2}}$	Froude sayısı	$\dfrac{\text{Atalet kuvveti}}{\text{Yerçekimi kuvveti}}$	Fr
$u(\rho \ell / \gamma)^{1/2}$	Weber sayısı	$\dfrac{\text{Atalet kuvveti}}{\text{Yüzeysel gerilme kuvveti}}$	We
$\dfrac{u}{(K/\rho)^{1/2}} = \dfrac{u}{a}$	Mach sayısı	$\dfrac{\text{Atalet kuvveti}}{\text{Elastik kuvvet}}$	M

$\dfrac{\Delta p^*}{\frac{1}{2}\rho u^2}$	Newton sayısı	$\dfrac{\text{Basınç kuvveti}}{\text{Atalet kuvveti}}$	Ne
$\dfrac{(p - p_v)}{\frac{1}{2}\rho u^2}$	Kavitasyon sayısı	$\dfrac{\text{Basınç kuvveti}}{\text{Atalet kuvveti}}$	σ

Burada , u karakteristik hızı , ℓ karakteristik uzunluğu göstermektedir.

Tam benzerlik için,model ve gerçek yapılarda birbirine karşılık gelen noktalarda oluşturulan büyüklüklerin oranı her iki sistemde aynı olmalıdır.

$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z = H$ denkleminde, yoğunluğu ρ olan bir akışkanın bir akım çizgisi boyunca sürtünmesiz akışı için referans seviyesinden z yüksekliğinde p basıncı ve u hızı arasında bir fiziksel bağıntının olduğunuboyut analizi yardımıyla gösteriniz. Ayrıca H nin boyutunu bulunuz.

ÇÖZÜM. Denklem bir fiziksel bağıntıyı gösterdiğinden herbir terim aynı boyuta sahip olmalıdır.

Değişkenlerin boyutları,

$$\text{basınç } p = \frac{\text{kuvvet}}{\text{alan}} = \frac{\text{kütle x ivme}}{\text{alan}}$$

$$p = \left[M\,L^{-1}\,T^{-2}\right]$$

$$\text{yoğunluk } \rho = \frac{\text{kütle}}{\text{hacim}} = \left[M\,L^{-3}\right]$$

$$\text{hız} \quad u = \frac{\text{yol}}{\text{zaman}} = \left[L\,T^{-1}\right]$$

$$\text{yerçekimi ivmesi} \quad g = \left[L\,T^{-2}\right]$$

$$\text{yükseklik} \quad z = \left[L\right]$$

Denklemi sol tarafındaki terimlerin boyutu :

$$p = \left[M\,L^{-1}\,T^{-2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho u^2 = \left[M\,L^{-3}\right]\left[L^2\,T^{-2}\right] = \left[M\,L^{-1}\,T^{-2}\right]$$

$$\rho g z = \left[M\,L^{-3}\right]\left[L\,T^{-2}\right]\left[L\right] = \left[M\,L^{-1}\,T^{-2}\right]$$

Bütün terimler aynı boyutlara sahiptir ve denklemin fiziksel bakımdan mümkün olabilmesi için

$$H = \left[M\,L^{-1}\,T^{-2}\right] \quad \text{yazılır.}$$

Bir santrifüj pompada çark çapı (d), debi (Q), basma basıncı (p), akışkanın yoğunluğu (ρ) ve çarkın devir sayısı (n) arasındaki bağıntının $\frac{d^4 p}{\rho Q^2} = f\left(\frac{d^3 n}{Q}\right)$ şeklinde olacağını ve basma yüksekliğinin (H_m) aynı şartlar için akışkanın cinsinden bağımsız olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

Değişkenler	Sembol	Boyut
Çark çapı	d	L
Debi	Q	L^3T^{-1}
Basınç	p	$ML^{-1}T^{-2}$
Yoğunluk	ρ	ML^{-3}
Devir sayısı	n	T^{-1}

$n = 5,\ m = 3$

$n - m = 5 - 3 = 2 \implies \pi_1, \pi_2 \implies \pi_1 = f(\pi_2)$

$m + 1 = 3 + 1 = 4$ değişkenle π_1 ve π_2 yazılır.

$$\pi_1 = \frac{p}{d^{a_1}\, Q^{b_1}\, \rho^{c_1}} \qquad \pi_2 = \frac{n}{d^{a_2}\, Q^{b_2}\, \rho^{c_2}}$$

$$\pi_1 = \frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[L]^{a_1}\,[L^3T^{-1}]^{b_1}\,[ML^{-3}]^{c_1}} ; \quad \pi_2 = \frac{[T^{-1}]}{[L]^{a_2}\,[L^3T^{-1}]^{b_2}\,[ML^{-3}]^{c_2}}$$

$$[M^0L^0T^0] = [M^{1-c_1}\ L^{-a_1-3b_1+3c_1-1}\ T^{b_1-2}] \quad \{\pi_1 \text{ için}$$

$$[M^0L^0T^0] = [M^{-c_2}\ L^{-a_2-3b_2+3c_2}\ T^{b_2-1}] \quad \{\pi_2 \text{ için}$$

$c_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_1 = -4,\quad c_2 = 0,\ b_2 = 1,\ a_2 = -3$ bulunur.

$$\pi_1 = \frac{d^4 p}{\rho Q^2}, \quad \pi_2 = \frac{d^3 n}{Q} ; \quad \pi_1 = f(\pi_2) \Rightarrow \frac{d^4 p}{\rho Q^2} = f\left(\frac{d^3 n}{Q}\right)$$

$H_m = \frac{p}{\rho g} \implies \frac{p}{\rho} = g H_m$ yerine konulursa

$$\frac{d^4 g}{Q^2} H_m = f\left(\frac{d^3 n}{Q}\right) \qquad \text{olur.}$$

Bilinen bir prototipe gelen F sürükleme kuvvetini bulabilmek için bir model rüzgar-tünelinde denenecektir. Fiziksel olaydaki kuvvetler yalnız basınç, viskoz ve atalet kuvvetleridir. Buna göre boyut analizi yardımıyla (Rayleigh metodunu kullanarak) $F = \rho \ell^2 u^2 \phi\left(\frac{u \ell \rho}{\mu}\right)$ olduğunu gösteriniz. Olaya giren fiziksel değişkenler F sürükleme kuvveti, ρ akışkanın yoğunluğu, ℓ karakteristik uzunluk, u karakteristik hız ve μ dinamik viskozitedir.

ÇÖZÜM

Rayleigh metoduna göre

$$F = \phi(\rho, \ell, u, \mu)$$

ve

$$F = \rho^a \ell^b u^c \mu^d$$

yazılır. Eşboyutluluk ilkesine göre

$$[M\,L\,T^{-2}] = [M\,L^{-3}]^a [L]^b [L\,T^{-1}]^c [M\,L^{-1}\,T^{-1}]^d$$

$$[M\,L\,T^{-2}] = [M^{a+d} \cdot L^{-3a+b+c-d}\ T^{-c-d}]$$

bulunur ve

$$a + d = 1 \qquad (1)$$

$$-3a + b + c - d = 1 \qquad (2)$$

$$-c - d = -2 \qquad (3)$$

elde edilir.

(1) ve (3) den

$$a = 1-d$$

$$c = 2-d$$

(2) de yerine konursa $b = 2-d$ olur.

Sonuçlar yerine konursa,

$$F = \rho^{1-d} \cdot \ell^{2-d} \cdot u^{2-d} \cdot \mu^{d}$$

$$F = \rho \ell^2 u^2 \left(\frac{\rho \ell u}{\mu}\right)^{-d}$$

veya

$$F = \rho \ell^2 u^2 \phi\left(\frac{u \ell \rho}{\mu}\right)$$

bulunur.

Bilinen bir prototipe gelen F sürükleme kuvvetini bulabilmek için bir model rüzgar-tünelinde denenecektir. Fiziksel olaydaki kuvvetler yalnız basınç, viskoz ve atalet kuvvetleridir. Buna göre boyut analizi yardımıyla (π metodunu kullanarak) $F = \rho \ell^2 u^2 \phi \left(\frac{u \ell \rho}{\mu}\right)$ olduğunu gösteriniz. Olaya giren fiziksel değişkenler F sürükleme kuvveti, ρ akışkanın yoğunluğu, ℓ karakteristik uzunluk, u karakteristik hız ve μ dinamik viskozitedir.

ÇÖZÜM : n= 5 , m= 3 olduğundan

n − m = 5 − 3 = 2 boyutsuz grup m + 1 = 3 + 1 = 4 değişkenle

$\phi(\pi_1, \pi_2) = 0$ veya

$\pi_1 = \phi(\pi_2)$ şeklinde oluşturulur.

$$\pi_1 = \rho^{a_1} u^{b_1} \ell^{c_1} F$$

$$\pi_2 = \rho^{a_2} u^{b_2} \ell^{c_2} \mu^{-1}$$

yazılarak,

$$\left[M^0 L^0 T^0\right] = \left[ML^{-3}\right]^{a_1} \left[LT^{-1}\right]^{b_1} \left[L\right]^{c_1} \left[MLT^{-2}\right]$$

$$0 = a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = -1$$

$$0 = -3a_1 + b_1 + c_1 + 1 \Rightarrow c_1 = -2$$

$$0 = -b_1 - 2 \Rightarrow b_1 = -2$$

$\pi_1 = \rho^{-1} u^{-2} \ell^{-2} F$ ve

$$\left[M^0 L^0 T^0\right] = \left[ML^{-3}\right]^{a_2} \left[LT^{-1}\right]^{b_2} \left[L\right]^{c_2} \left[ML^{-1} T^{-1}\right]^{-1}$$

$$0 = a_2 - 1 \Rightarrow a_2 = +1$$

$$0 = -3a_2 + b_2 + c_2 - 1 \Rightarrow c_2 = +1$$

$$0 = -b_2 + 1 \Rightarrow b_2 = +1$$

$\pi_2 = \rho^{+1} u^{+1} \ell^{+1} \mu^{-1}$ bulunur.

$\frac{F}{\rho u^2 \ell^2} = \phi\left(\frac{\rho u \ell}{\mu}\right)$ bağıntısından

$F = \rho u^2 \ell^2 \phi(Re)$ elde edilir.

Bir pervanenin F itme kuvvetinin d çapına, u ilerleme hızına, ρ akışkanın yoğunluğuna, n saniyedeki devir sayısına ve μ dinamik viskozitesine bağımlı olduğunu kabul ederek

$$F = \rho d^2 u^2 \phi \left\{ \frac{dn}{u}, \frac{\mu}{\rho d u} \right\}$$

şeklinde yazılabileceğini Rayleigh veya Buckingham'ın π metodunu kullanarak gösteriniz.

ÇÖZÜM Rayleigh metodu ile çözüm :

$$F = \phi\, (d, u, \rho, n, \mu)$$

$$F = d^a u^b \rho^c n^{d'} \mu^e \qquad (1)$$

$$F = \left[MLT^{-2}\right], \quad d = [L], \quad u = \left[LT^{-1}\right], \quad \rho = \left[ML^{-3}\right]$$

$$n = \left[T^{-1}\right], \quad \mu = \left[ML^{-1}T^{-1}\right]$$

(1) denkleminde yerine konursa

$$MLT^{-2} = [L]^a \left[LT^{-1}\right]^b \left[ML^{-3}\right]^c \left[T^{-1}\right]^{d'} \left[ML^{-1}T^{-1}\right]^e$$

M için $1 = c + e$

L için $1 = a + b - 3c - e$

T için $-2 = -b - d' - e$ bulunur.

$c = 1-e, \quad b = 2-d'-e, \quad a = 2+d'-e$ (1) de yerine konursa

$$F = \rho d^2 u^2 \left\{ \left(\frac{dn}{u}\right)^{d'} \left(\frac{\mu}{\rho d u}\right)^e \right\} = \rho d^2 u^2 \phi \left\{ \frac{dn}{u}, \frac{\mu}{\rho d u} \right\}$$

elde edilir.

π metodu ile çözüm:

$n = 6, \quad m = 3, \quad n-m = 6-3 = 3 \Rightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$\phi\,(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ veya $\quad \pi_1 = \phi\,(\pi_2, \pi_3)$ olmalıdır.

$$\pi_1 = \rho^{a_1} u^{b_1} d^{c_1} F^{-1}$$

$$\pi_2 = \rho^{a_2} u^{b_2} d^{c_2} n^{-1}$$

$$\pi_3 = \rho^{a_3} u^{b_3} d^{c_3} \mu^{-1}$$

yazılırsa

$$\pi_1 \text{ için } \left[M^0 L^0 T^0\right] = \left[ML^{-3}\right]^{a_1} \left[LT^{-1}\right]^{b_1} [L]^{c_1} \left[MLT^{-2}\right]^{-1}$$

$$= \left[M^{a_1 - 1}\, L^{-3a_1 + b_1 + c_1 - 1}\, T^{-b_1 + 2}\right]$$

$a_1 = 1, \; b_1 = 2$ ve $c_1 = 2$ olur.

Buradan $\Pi_1 = \frac{\rho u^2 d^2}{F}$ elde edilir.

Π_2 için aynı şekilde yazarak $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = -1$ bulunur ve $\Pi_2 = \frac{u}{d\,n}$ olur.

Π_3 için ise $a_3 = 1$, $b_3 = 1$ ve $c_3 = 1$ olduğundan

$$\Pi_3 = \frac{\rho u d}{\mu}$$

elde edilir. $\Pi_1 = \emptyset\,(\Pi_2, \Pi_3)$ de yerine konursa

$$F = \rho u^2 d^2 \emptyset \left(\frac{d\,n}{u}, \frac{\mu}{\rho u d}\right)$$ bulunur.