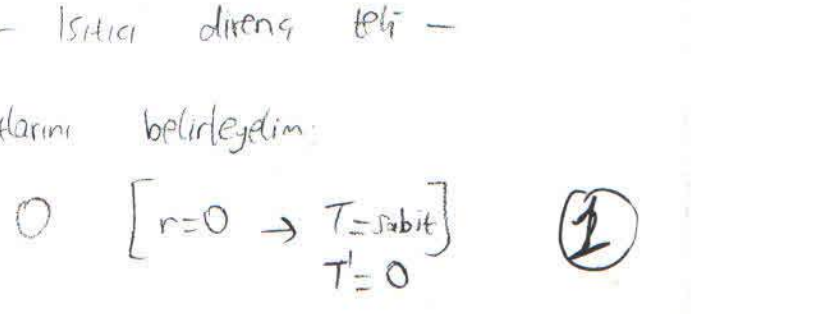
$r_0 = 10$ mm yarıçapında uzun bir direnç teli, atmosferik basınçtaki suyu kaynatmak için kullanılmaktadır. Direnç telinin ısı iletim katsayısı, $k = 15$ W/m°C olup bu telden akım geçirilerek içerisinde üniform (her yerinde aynı) olarak $\dot{q} = 3{,}7 \times 10^7$ W/m³ ısı üretilmektedir. Üretilen ısı d[...]renli olarak $T_\infty = 100°C$ sıcaklıkta kaynayan suya geçmektedir. Su ile [t]el yüzeyi arasındaki ısı taşınım (konveksiyon) katsayısı $h = 4500$ W/m²°C [o]larak bilinmektedir. Bir boyutlu sürekli rejim şartlarında tel içerisindeki [s]ıcaklık dağılımı $T = T(r)$ olmak üzere;

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Cevap – 1 –

diferansiyel denklemi ile verilmektedir. Isı üreminden dolayı oluşan max. [sı]caklık $T'(0) = 0$ ve telin dış yüzeyindeki ısı taşınımı sınır şartlarını [k]ullanarak diferansiyel denklemi çözünüz ve telin yüzey sıcaklığını bulunuz.



– Isıtıcı direnç teli –

Önce sınır şartlarını belirleyelim:

(1) $T'(0) = 0$ $\left[r=0 \rightarrow \begin{matrix} T = \text{sabit} \\ T' = 0 \end{matrix}\right]$ (1)

(2) Direnç telinin ürettiği ısı miktarı = Isı taşınımıyla suya aktarılan ısı miktarı

$$k\,T'(r_0) = h\left[T(r_0) - T_\infty\right]$$ (1)

$\left(k\,\frac{dT(r_0)}{dr}\right)$

Denklem iki defa integre edilerek genel çözüm bulunmalıdır.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)dr=\int -\frac{\dot{q}}{k}r\,dr \quad \text{(1. integral işlemi)}$$

$$r\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}}{2k}r^2+c_1 \Rightarrow \int \frac{dT}{dr}dr=\int\left(-\frac{\dot{q}}{2k}r+c_1\right)dr \quad \text{(2. integral işlemi)}$$

$$T(r)=-\frac{\dot{q}}{4k}r^2+c_1.r+c_2 \quad 6$$

Belirlenen sınır şartları kullanılarak c_1 ve c_2 bulunmalıdır.

1) $r=0 \rightarrow T=\text{sabit}$
$T'=0$

$$T'=\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}}{2k}r+c_1 \Rightarrow 0=-\frac{\dot{q}}{2k}.0+c_1 \Rightarrow c_1=0 \quad 2 \quad \text{bulunur.}$$

2) $$-k\frac{dT}{dr}=h\left[T(r_0)-T_\infty\right]$$

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}}{2k}r \quad \text{(1. sınır şartı kullanılarak bulunur.)}$$

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_0}=-\frac{\dot{q}}{2k}r_0$$ olacaktır. Bu ifadenin integrali alındığında,

$$T(r_0)=-\frac{\dot{q}}{4k}r_0^2+c_2 \quad \text{bulunur.} \quad 2$$

Bulduğumuz bu eşitlikleri kullanarak;

$$-k\left(-\frac{\dot q}{2k} r_0\right) = h\left[-\frac{\dot q}{4k} r_0^2 + c_2 - T_\infty\right]$$

Denklem düzenlenerek c_2 bulunmalıdır.

$$\frac{\dot q}{2} r_0 = h\left[-\frac{\dot q}{4k} r_0^2 + c_2 - T_\infty\right]$$

$$\frac{\dot q}{2h} r_0 = -\frac{\dot q}{4k} r_0^2 + c_2 - T_\infty \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{\dot q}{2h} r_0 + \frac{\dot q}{4k} r_0^2 + T_\infty} \quad 1$$

Sıcaklık dağılımını veren ifade;

$$T(r) = -\frac{\dot q}{4k} r^2 + \frac{\dot q}{2h} r_0 + \frac{\dot q}{4k} r_0^2 + T_\infty$$

$$\boxed{T(r) = -\frac{\dot q}{4k}\left(r^2 - r_0^2\right) + \frac{\dot q}{2h} r_0 + T_\infty} \quad 1$$

Telin yüzey sıcaklığını bulabilmek için $r = r_0 = 10$ mm yazılırsa;

$$T(10\,mm) = \cancel{-\frac{\dot q}{4k}\left(r_0^2 - r_0^2\right)}^{\,0} + \frac{\dot q}{2h} r_0 + T_\infty$$

$$= \frac{\dot q}{2h} r_0 + T_\infty \quad 3$$

$$T(10\,mm) = \frac{3,7 \times 10^7}{2 \times 4500} \times (10 \times 10^{-3})\,m + 100\,^\circ C \Rightarrow \boxed{T(10\,mm) = 141,11\,^\circ C \simeq 141\,^\circ C \text{ bulunur.}}$$

Birbiriyle seri olarak bağlı bulunan bir R direnci ile L bobininin uçları arasına $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ alternatif gerilimi tatbik ediliyor. Herhangi bir t anında devreden geçen akım şiddeti I'nın diferansiyel denklemi

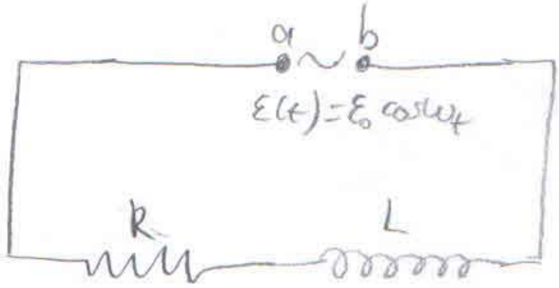
$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t = \mathcal{E}(t)$$

şeklinde verildiğine göre;

a-) Devreden geçen akım şiddetinin zamana bağlı değişimini veren ifadeyi bulunuz. [t=0 anındaki akım değerini sıfır (0) alınız.]

b-) $R=5\,\Omega$, $\mathcal{E}=50\,V$ ve $L=2H$ $(\omega=5\ s^{-1})$ değerleri için; t= 10 saniyedeki akım şiddetini hesaplayınız.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$



$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t$$ [$y' + f(x)y = g(x)$ şeklinde yani lineer tip dif. denk.]

$$\Downarrow$$

$$I' + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t \quad ; \quad f(t)=\frac{R}{L}, \quad g(t)=\frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos \omega t$$ 2

$$I=\left[\int g(t)e^{\int f(t)dt}dt+c\right]e^{-\int f(t)dt}=\left[\int \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t\, e^{\int \frac{R}{L}dt}dt+c\right]e^{-\int\frac{R}{L}dt}$$

3

$$=\left[\int \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t\, e^{\frac{Rt}{L}}dt+c\right]e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{L}\int \underbrace{\cos\omega t}_{dv}\,\underbrace{e^{\frac{R}{L}t}}_{u}dt = uv-\int v\,du = \left[e^{\frac{R}{L}t}\frac{\sin\omega t}{\omega}-\int\frac{\sin\omega t}{\omega}\frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}}dt\right]\cdot\frac{\varepsilon_0}{L}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u=e^{\frac{R}{L}t} & dv=\cos\omega t\,dt \\ du=\frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}}dt & v=\frac{\sin\omega t}{\omega}\end{array}\right\}$$

5

Elde edilen $\int \underbrace{\sin\omega t}_{dv}\,\underbrace{e^{\frac{R}{L}}}_{u}dt$ ifadesi için tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\left.\begin{array}{ll} u=e^{\frac{R}{L}t} & dv=\sin\omega t\,dt \\ du=\frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}}dt & v=-\frac{\cos\omega t}{\omega}\end{array}\right\} \begin{array}{l} =uv-\int v\,du \\ =-e^{\frac{R}{L}t}\frac{\cos\omega t}{\omega}+\int\frac{\cos\omega t}{\omega}\frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}}dt \;// \end{array}$$

Bulunan ifadeler yerlerine yazılırsa.

$$\int\frac{\varepsilon_0}{L}\cos\omega t\, e^{\frac{R}{L}t}dt=\left[e^{\frac{R}{L}t}\frac{\sin\omega t}{\omega}-\frac{R}{L\omega}\left[-e^{\frac{R}{L}t}\frac{\cos\omega t}{\omega}+\int\frac{\cos\omega t\cdot R}{\omega\cdot L}e^{\frac{R}{L}}dt\right]\right]\frac{\varepsilon_0}{L}$$

$$\int\cos\omega t\, e^{\frac{R}{L}}dt\left[1+\frac{R}{L\omega}\right]=e^{\frac{R}{L}t}\frac{\sin\omega t}{\omega}+e^{\frac{R}{L}t}\frac{\cos\omega t}{\omega}\frac{R}{L\omega}=e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{\omega\sin\omega t+R\cos\omega t}{\omega^2L}\right]$$

$$I=\left[\frac{\varepsilon_0}{L}\cdot\frac{e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{\omega\sin\omega t+R\cos\omega t}{\omega^2L}\right)}{1+\frac{R}{L\omega}}+c\right]e^{-\frac{R}{L}t}$$

4(a)

Denklem düzenlendiğinde,

$$I = \frac{\varepsilon_0}{L} \cdot \frac{\frac{w \sin wt + R \cos wt}{w^2 L}}{\frac{R + Lw}{Lw}} + c e^{-\frac{R}{L} t}$$ bulunur. 3

Başlangıç değeri kullanılarak c sabiti hesaplanmalıdır.

$t=0 \rightarrow I=0$

$$0 = \frac{\varepsilon_0}{L} \frac{\frac{w \overset{0}{\sin w0} + R \overset{1}{\cos w0}}{w}}{Lw + R} + c \cdot \underbrace{e^{-\frac{R}{L} \cdot 0}}_{=1} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{L} \cdot \frac{\frac{R}{w}}{Lw+R} + c = 0$$

$$c = -\frac{\varepsilon_0 \cdot R}{Lw(Lw+R)}$$ olur. 3

Akımın zamanla değişimini veren ifade;

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon_0 \left(\sin wt + \frac{R}{w} \cos wt\right)}{L\,(Lw+R)} - \frac{\varepsilon_0 R}{Lw\,(Lw+R)}}$$ (Cevap a) 5

b) Verilen sınır şartları denklemde yerine yazılarak;

$$I(10s) = \frac{\varepsilon_0}{L(Lw+R)} \left[\sin wt + \frac{R}{w} \cos wt - \frac{R}{w} \right] = \frac{50}{2(2{,}5+5)} \left[+ \sin(5.10) + \frac{5}{5} \cos(5.10) - \frac{5}{5} \right]$$

$I(10s) = 0{,}681$ Amper bulunur. 2

4(b)