B PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

1. TÜKETİCİ DAVRANIŞLARI

Problem: 1.01

Fayda fonksiyonu $U = 4q_1q_2^2$ biçiminde olan bir tüketicinin optimum tüketim bileşimi $q_1 = 15$ ve $q_2 = 24$ birimdir. Bu tüketici için marjinal ikame oranı (MRS)'yi bulunuz.

Çözüm: 1.01

Herhangi bir tüketim bileşiminde mallar arasındaki Marjinal İkame Oranı (MRS); malların o tüketim bileşimi için marjinal faydaları oranına eşittir.

$$MRS = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2}$$

Fayda fonksiyonunun kısmi türevleri alınarak, malların marjinal faydaları elde edilebilir.

$$MRS = \frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{4q_2^2}{8q_1q_2} = \frac{q_2}{2q_1}$$

$q_1 = 15$ ve $q_2 = 24$ değerleri yerlerine konulduğunda, mallar arasındaki marjinal ikame oranı (MRS), aşağıdaki gibi bulunur.

$$MRS = \frac{q_2}{2q_1} = \frac{24}{2(15)} \therefore MRS = 0{,}8$$

12 4

5

***

Problem: 1.02

Fayda fonksiyonu $U = q_1^2q_2$ biçiminde olan bir tüketici, $q_1 = 3$ ve $q_2 = 8$ birim mal tüketerek belirli bir fayda elde etmektedir. Bu tüketicinin (q_1) malından 2 birim tüketmeye razı olabilmesi için kendisine en az kaç birim (q_2) malı teklif etmek gerekir?

Çözüm: 1.02

Tüketicinin (q_1) malı tüketimini bir birim azaltmaya razı olabilmesi, elde ettiği toplam fayda düzeyinin değişmemesine bağlıdır. Tüketicinin başlangıçta elde ettiği toplam fayda, aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$U = q_1^2q_2 = (3^2).8 \quad \therefore \quad U = 72$$

Tüketicinin 2 birim (q_1) malı tüketerek bu kadar toplam fayda elde etmesi, aşağıda görüldüğü gibi, ancak ve ancak 18 birim (q_2) malı tüketmesiyle mümkün olabilir.

$$72 = (2^2).\ q_2 \quad \therefore \quad q_2 = 18 \text{ birim}$$

Şu halde, tüketiciye 18 birim (q_2) malı teklif etmek gerekir.

Okuyucu, burada, fark (Δ) şeklindeki değişmelerle türevsel (d veya δ) değişmelerin aynı sonucu vermediğini gözden kaçırmamalıdır.

***

Problem: 1.03

Bir tüketici dönem harcamasıyla yalnızca (q_1) malı satınaldığında 75 birim, yalnızca (q_2) malı satınaldığında ise 30 birim mal satınalabilmektedir. Ancak, tüketicinin gerçekte satınaldığı (q_2) malı miktarı 10 birimdir. Buna göre,

a) tüketici kaç birim (q_1) malı satınalmaktadır?

b) Tüketicinin bütçe doğrusunun eğimi kaçtır?

Çözüm: 1.03

a) Tüketicinin bütçe denklemini aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz.

$$q_2 = \frac{C}{P_2} - \frac{P_1}{P_2}q_1$$

Ayrıca, aşağıdaki büyüklükler problemde verilmiştir.

$$q_2 = \frac{C}{P_2} = 30 \quad \therefore \quad C = 30\,P_2$$

$$q_1 = \frac{C}{P_1} = 75 \quad \therefore \quad C = 75\,P_1$$

$$C = C \Rightarrow \quad 30\,P_2 = 75\,P_1 \quad \therefore \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{30}{75} = 0{,}4$$

Elde ettiğimiz sonuçları, tüketicinin bütçe denkleminde yerlerine koyalım.

$$q_2 = 30 - 0{,}4\,q_1$$

$q_2 = 10$ için bütçe denklemini çözelim.

$10 = 30 - 0{,}4\,q_1 \Rightarrow q_1 = 50$ birim

b) Bütçe denklemini problemin (a) şıkkında elde ettiğimize göre, bütçe doğrusunun eğimini kolayca bulabiliriz.

$$m = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{P_1}{P_2} = -0{,}4$$

***

Problem: 1.04

Bütçe doğrusunun denklemi $q_2 = 40 - aq_1$ biçiminde olan bir tüketici, C = 160 TL dönem harcaması yapmaktadır. Bu tüketici (q_1) malının birimine 2 TL ödediğine göre, bütçe doğrusunun denkleminde yer alan (a) parametresinin değeri kaçtır?

Çözüm: 1.04

Tüketici bütçe doğrusunun denkleminden anlaşılıyor ki, tüketici bütün parasıyla yalnızca (q_2) malı satınalsaydı, $q_2 = 40$ birim satınalabilecekti. Tüketicinin toplam harcaması da bilindiğine göre, aşağıdaki işlem yapılabilir.

$$q_2 = \frac{C}{P_2} = \frac{160}{P_2} = 40 \quad \therefore \; P_2 = 4 \text{ TL}$$

Öte yandan, problemde, (q_1) malı fiyatı $P_1 = 2$ TL olarak verildiğine göre, bütçe doğrusunun eğimi bulunabilir.

$$m = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{P_1}{P_2} = -a \quad \therefore \; a = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

***

Problem: 1.05

Dönem harcaması C = 240 TL olan tüketicinin fayda fonksiyonu $U = 5q_1 + 6q_2 + q_1.q_2$ biçimindedir.

Davranışlarında rasyonel olan bu tüketici $q_1 = 62$ ve $q_2 = 29$ birimlik bir tüketim bileşimine sahiptir. Buna göre, malların birim fiyatlarını bulunuz.

Çözüm: 1.05

Bir tüketim bileşiminin optimum olabilmesi için fiyatların birbirine oranı, malların marjinal faydaları oranına eşit olmalıdır. Bu II. Gossen Kanunu'nun bir gereğidir.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

Problemde tüketicinin fayda fonksiyonu verildiğine göre, bu fayda fonksiyonunun (q_1) ve (q_2)'ye göre kısmi türevleri alınarak, malların marjinal faydaları bulunabilir.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{5 + q_2}{6 + q_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

$q_1 = 62$ ve $q_2 = 29$ değerleri, yukarıdaki eşitlikte yerlerine konularak, mal fiyatlarından biri öteki cinsinden elde edilebilir.

$$\frac{5 + q_2}{6 + q_1} = \frac{5 + 29}{6 + 62} = \frac{P_1}{P_2} \quad \therefore \; P_1 = 0{,}5P_2$$

Şimdi, elde ettiğimiz bu bilginin ışığı altında, tüketicinin bütçe denklemini oluşturalım.

$$C = P_1 q_1 + P_2 q_2$$

$$240 = (0{,}5\,P_2)\,62 + P_2\,(29) \Rightarrow 60\,P_2 = 240$$

$$\therefore \; P_2 = 4 \text{ TL/birim}$$

(P_2)'nin bu değerini, yine (P_2) cinsinden ifade ettiğimiz (P_1) eşitliğinde yerine koyalım.

$$P_1 = 0{,}5\,P_2 = 0{,}5\,(4) \; \therefore \; P_1 = 2 \text{ TL/birim}$$

***

Problem: 1.06

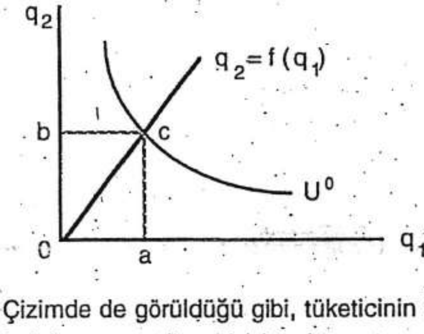
Bir tüketicinin optimum tüketim bileşiminin üzerinde yer aldığı kayıtsızlık eğrisinin denklemi $q_2 = 10q_1^{-0,5}$ ve gelir-tüketim eğrisinin denklemi de $q_2 = 1{,}25q_1$ biçimindedir. $P_1 = 10$ TL/birim olduğuna göre,

a) (q_2) malının fiyatı (P_2) kaç TL'dir?

b) Tüketicinin dönem tüketim harcaması ne kadardır?

Çözüm: 1.06

Problemin her iki şıkkının çözümüne hazırlık olmak üzere, bir şekil çizerek, bazı gözlemlerde bulunabiliriz.



Çizimde de görüldüğü gibi, tüketicinin satınaldığı mal bileşiminin geometrik yeri (c) noktasını vermektedir. Bu noktada tüketim bileşimi optimum olduğu için, bu nokta bir yandan gelir-tüketim eğrisi üzerinde, öte yandan da belirli bir kayıtsızlık eğrisi üzerindedir. Şu halde, optimum tüketim bileşimini bulabilmek için kayıtsızlık eğrisinin denklemi ile gelir-tüketim eğrisinin denklemini birbirine eşitlemek gerekir.

$$q_2 = q_2 \Rightarrow 10q_1^{-0,5} = 1{,}25q_1 \Rightarrow q_1^{1,5} = 8 \; \therefore \; q_1 = 4$$

Şimdi artık tüketicinin tükettiği (q_2) malı miktarını kolayca bulabiliriz. (q_1) için $q_1 = 4$ değerini kayıtsızlık eğrisi veya gelir-tüketim eğrisi denkleminde yerine koyarak tüketicinin satınaldığı (q_2) malı miktarını tesbit edebiliriz.

$q_2 = 1{,}25q_1 = 1{,}25.(4) \therefore q_2 = 5$

$q_2 = 10q_1^{-0,5} = \dfrac{10}{\sqrt{4}} \therefore q_2 = 5$

Şimdi problemin şıklarının çözümüne geçebiliriz.

a) Tüketicinin satınaldığı mal miktarları ve (q_1) malının fiyatı belli olduğuna göre, marjinal ikame oranı (MRS) yardımıyla (q_2) malı fiyatını bulabiliriz. Marjiinal ikame oranı (MRS)'yi bulabilmek için kayıtsızlık eğrisi denkleminin türevini alıp bunu (-) ile çarpmak yeterlidir.

$$MRS = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow 5q_1^{-1,5} = \frac{10}{P_2} \Rightarrow \frac{5}{4\sqrt{4}} = \frac{10}{P_2}$$

$\therefore P_2 = 16$ TL/birim

b) Tüketicinin satınaldığı malların miktarları ve fiyatları bilindiğine göre, tüketicinin dönem harcama tutarı (C) kolayca elde edilebilir.

$$C = P_1q_1 + P_2q_2 \Rightarrow C = (10).(4) + (16).(5)$$

$\therefore C = 120$ TL

***

Problem: 1.07

Bir tüketicinin fayda fonksiyonu $U = q_1.q_2^2$ biçimindedir. Öte yandan, bu tüketicinin gelir-tüketim eğrisinin kapalı denklemi de $q_2 - 10q_1 = 0$ olarak ifade edilmiştir. (q_1) malını (P_1= a) birim fiyatından satınalan tüketici, (q_2) malını, hangi birim fiyattan satınalmaktadır?

Çözüm: 1.07

Bir tüketim bileşiminin optimum olabilmesi için fiyatların birbirine oranı, malların marjinal faydaları oranına eşit olmalıdır. Bu II. Gossen Kanunu'nun bir gereğidir.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

Problemde tüketicinin fayda fonksiyonu verildiğine göre, bu fayda fonksiyonunun (q_1) ve (q_2)'ye göre kısmi türevleri alınarak, malların marjinal faydaları bulunabilir.

$$\frac{q_2^2}{2q_1q_2} = \frac{q_2}{2q_1} = \frac{a}{P_2}$$

Gelir-tüketim eğrisi kapalı denklemi yardımıyla (q_2)'yi, (q_1) cinsinden ifade ederek, yukarıdaki eşitlikte yerine koyalım.

$$q_2 - 10q_1 = 0 \therefore q_2 = 10q_1$$

$$\frac{q_2}{2q_1} = \frac{10q_1}{2q_1} = \frac{a}{P_2} \therefore P_2 = 0{,}2\,a$$

***

Problem: 1.08

Bir tüketicinin optimum tüketim bileşimi, denklemi $q_2 = 72.q_1^{-0,25}$ biçiminde olan kayıtsızlık eğrisi üzerindedir. Dönem harcaması C = 135 TL olan tüketici rasyonel davrandığında (q_1) malından 16 birim satınalmaktadır. Buna göre, tüketici dönem harcamasının ne kadarını (q_2) malı satınalmak için harcar?

Çözüm: 1.08

Kayıtsızlık eğrisi denkleminde (q_1) yerine q_1 = 16 koyarak, tüketicinin satınaldığı (q_2) malı miktarını bulabiliriz.

$$q_2 = 72q_1^{-0,25} \Rightarrow q_2 = \frac{72}{\sqrt{\sqrt{16}}} \therefore q_2 = 36$$

Öte yandan, kayıtsızlık eğrisi denkleminin eğimini (-) ile çarpmak suretiyle tüketicinin marjinal ikame oranı (MRS)'ye ulaşabiliriz. Bu şekilde elde edeceğimiz marjinal ikame oranı (MRS)'yi de fiyatların birbirine oranına eşitleyebiliriz.

$$MRS = -\frac{dq_2}{dq_1} = 18q_1^{-1,25} \Rightarrow \frac{18}{q_1\sqrt{\sqrt{q_1}}} = \frac{P_1}{P_2}$$

Yukarıdaki eşitlikte (q_1) yerine q_1 = 16 değerini koyarak, mal fiyatlarından birini, öteki cinsinden ifade etme olanağını elde ederiz.

$$\frac{18}{16\sqrt{\sqrt{16}}} = \frac{18}{32} = \frac{P_1}{P_2} \therefore P_2 = \frac{32}{18}P_1$$

Şimdi artık, tüketicinin bütçe denklemini oluşturarak mal fiyatlarını bulabiliriz.

$$135 = 16P_1 + 36\left(\frac{32}{18}P_1\right) \therefore P_1 = 1{,}6875 \text{ TL}$$

(P_1)'in bu değerini; (P_1) cinsinden ifade ettiğimiz (P_2) eşitliğinde yerine koyalım.

$$P_2 = \frac{32}{18}P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{32}{18}(1{,}6875) \therefore P_2 = 3 \text{ TL}$$

Buna göre, tüketicinin (q_2) malına yaptığı harcama artık kolayca tesbit edilebilir.

$$P_2 . q_2 = (3).(36) = 108 \text{ TL}$$

***

Problem: 1.09

Bir tüketicinin optimum tüketim bileşiminin üzerinde yer aldığı kayıtsızlık eğrisinin denklemi $q_2 = 320.q_1^{-0,5}$ biçimindedir. P_1 = a iken, tüketici rasyonel davrandığında q_1 = 4 birim mal satınalmaktadır. (P_2 = 0,4 a) olsaydı, tüketici rasyonel davrandığında kaç birim (q_1) malı satınalırdı?

Çözüm: 1.09

Üzerinde optimum tüketim bileşimi bulunan kayıtsızlık eğrisinin denklemi bilinmektedir. Kayıtsızlık eğrisinin

a^{-2} $2a^{-3}$ $-2a^{-3}$ a^{-2} $-a^{-2}$ $2a^{-3}$

eğimini bulup, bunu (-) ile çarpmak suretiyle marjinal ikame oranı (MRS) elde edilebilir.

$$MRS = -\frac{dq_2}{dq_1} = 160q_1^{-1,5}$$

Dengede bir tüketici için, bu şekilde bulunan marjinal ikame oranı (MRS), mal fiyatları oranına eşit olmak zorundadır.

$$MRS = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow 160q_1^{-1,5} = \frac{a}{0,4a} \quad \therefore \; q_1 = 16$$

***

Problem: 1.10

Bir tüketicinin bütçe doğrusunun eğimi m = - 2'dir. Bu tüketici gelirinin tümünü harcadığında ancak (50) birim (q_2) malı satınalabilmektedir. P_1 = 6 TL/birim olduğuna göre, tüketicinin dönem harcaması (C) kaç TL'dir?

Çözüm: 1.10

Hatırlanacağı üzere, tüketici bütçe doğrusunun eğimi, mal fiyatları oranının (-) ile çarpımına eşittir. (q_1) malı fiyatı problemde verildiğine göre, (q_2) malı fiyatı kolayca bulunabilir.

$$m = -\frac{P_1}{P_2} \Rightarrow -2 = -\frac{6}{P_2} \quad \therefore \; P_2 = 3\text{ TL}$$

Öte yandan, tüketicinin bütün parasını (q_2) malına harcaması halinde bu maldan 50 birim satınaldığı da bilinmektedir. Şu halde, tüketici harcama tutarını bulmak için yapılacak iş; (q_2) malı birim fiyatı (3) ile (50)'yi çarpmaktan ibarettir.

$$C = P_2 . q_2 \Rightarrow C = (3).(50) = 150\text{ TL}$$

***

Problem: 1.11

Fayda fonksiyonu $U = 2q_1q_2 + 6q_1 + 2q_2$ biçiminde olan bir tüketici; dönem harcaması C = 212 TL iken, rasyonel davrandığında fiyatı P_1 = 8 TL/birim olan (q_1) malından q_1 = 14 birim satınalmaktadır. Buna göre,

a) tüketici kaç birim (q_2) malı satınalır?

b) (q_2) malının birim fiyatı (P_2) kaç TL'dir?

Çözüm: 1.11

a) Bir tüketim bileşiminin optimum olabilmesi, mal fiyatları oranının, malların marjinal faydaları oranına eşit olmasına bağlıdır.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

a^{-2} $-2a^{-3}$

Problemde tüketicinin fayda fonksiyonu verildiğine göre, bu fayda fonksiyonunun (q_1) ve (q_2)'ye göre kısmi türevleri alınarak, malların marjinal faydaları bulunabilir.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{2q_2 + 6}{2q_1 + 2} = \frac{P_1}{P_2}$$

$q_1 = 14$ ve $P_1 = 8$ değerlerini, yukarıdaki eşitlikte yerlerine koyalım.

$$\frac{2q_2 + 6}{2(14) + 2} = \frac{8}{P_2} \Rightarrow P_2 = \frac{240}{2q_2 + 6}$$

(P_2)'nin (q_2) cinsinden elde ettiğimiz değerini, oluşturacağımız bütçe denkleminde yerine koyalım.

$$C = P_1 q_1 + P_2 q_2 \Rightarrow 212 = (8).(14) + \frac{240}{2q_2 + 6} q_2$$

$\therefore \; q_2 = 15$ birim

b) (q_2) malının birim fiyatı (P_2)'yi bulmak için, $q_2 = 15$ değerini, (q_2) cinsinden ifade edilmiş (P_2) denkleminde yerine koymak yeterlidir.

$$P_2 = \frac{240}{2q_2 + 6} = \frac{240}{2(15) + 6} \quad \therefore \; P_2 = \frac{60}{9}\text{ TL}$$

***

Problem: 1.12

Malları sırasıyla P_1 = 12 TL/birim ve P_2 = 3 TL/birim fiyattan satınalan bir tüketicinin optimum tüketim bileşiminin üzerinde yer aldığı kayıtsızlık eğrisinin denklemi $q_2 = 1024\,q_1^{-2}$ biçimindedir. Rasyonel davranan bu tüketici, malların herbirinden kaç birim satınalır?

Çözüm: 1.12

Üzerinde optimum tüketim bileşimi bulunan kayıtsızlık eğrisinin denklemi bilinmektedir. Kayıtsızlık eğrisinin eğimini bulup, bunu (-) ile çarpmak suretiyle marjinal ikame oranı (MRS) elde edilebilir.

$$MRS = -\frac{dq_2}{dq_1} = 2048q_1^{-3}$$

Dengede bir tüketici için, bu şekilde bulunan marjinal ikame oranı (MRS), mal fiyatları oranına eşit olmak zorundadır.

$$MRS = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow 2048q_1^{-3} = \frac{12}{3} \quad \therefore \; q_1 = 8$$

(q_1)'in bu değerini, optimum tüketim bileşiminin üzerinde yer aldığı kayıtsızlık eğrisi denkleminde yerine koyarak, tüketicinin satınaldığı (q_2) miktarını elde edebiliriz.

$$q_2 = 1024q_1^{-2} \Rightarrow q_2 = \frac{1024}{(8^2)} \quad \therefore \; q_2 = 16$$

***

$(420-4q_1-5q_2)=0$ $\frac{4}{5}=\frac{q_2^2}{2q_1 \cdot q_2}$ $8q_1=5q_2$ $C=4q_1+5q_2$ $=\frac{5}{2}q_2$ $15q_2=840$

Problem: 1.13

Fayda fonksiyonu $U = q_1 q_2^2$ biçiminde olan bir tüketici, piyasa fiyatları, sırasıyla $P_1 = 4$ TL/birim ve $P_2 = 5$ TL/birim olan mallara toplam olarak $C = 420$ TL harcayacaktır. Mümkün en çok faydayı elde edebilmesi için tüketici, malların herbirinden kaç birim satınalmalıdır?

Çözüm: 1.13

Bu, tipik bir kısıt altında maksimizasyon problemidir. Böyle bir optimizasyon probleminin çözümünde Lagrange fonksiyonundan yararlanılır. Lagrange fonksiyonunu oluşturabilmek için, bir amaç fonksiyonuna, bir de yan koşul veya kısıt denklemine ihtiyaç vardır. Ele aldığımız problemde amaç fonksiyonu, tüketicinin maksimize etmeyi istediği fayda fonksiyonudur. Şu halde, amaç fonksiyonu problemde verilmiştir.

Yan koşul veya kısıt denklemini ise, tüketicinin bütçe denkleminden elde edebiliriz. Bunun için öncelikle, tüketicinin bütçe denklemini oluşturalım. Tüketici, elindeki paranın bir bölümünü (q_1) malı, bir bölümünü de (q_2) malı satınalmak için harcayacaktır.

$$C = P_1 \cdot q_1 + P_2 \cdot q_2 \Rightarrow 420 = 4q_1 + 5q_2$$

Bütçe denklemini, kısıt veya yan koşul denklemi olarak ifade edebilmek için, sıfıra eşitlememiz gerekir.

$$420 - 4q_1 - 5q_2 = 0$$

Bu düzenlemelerden sonra, artık Lagrange fonksiyonunu oluşturabiliriz.

$$G = q_1 \cdot q_2^2 + \lambda(420 - 4q_1 - 5q_2)$$

Artık, yapılacak iş; Lagrange fonksiyonu (G)'yi maksimize eden değişken değerleri (q_1), (q_2) ve (λ)'yı araştırmaktan ibarettir. Bulunan değişken değerlerinin bir maksimumu verebilmesi için, ikinci derece koşullarını da, ayrıca, sağlaması gerekir (*).

Bunun için, Lagrange fonksiyonu (G)'nin kısmi türevleri alınarak her bir kısmi türev sıfıra eşitlenir ve bu şekilde oluşan denklem sistemi, bilinmeyenler için çözülür.

$$\left(\frac{\delta G}{\delta q_1}\right) = q_2^2 - 4\lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 0{,}25q_2^2$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta q_2}\right) = 2q_1 \cdot q_2 - 5\lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 0{,}4\, q_1 \cdot q_2$$

(*) *İktisadi analiz bakımından özel bir önemi olmadıkça, ikinci derece koşulların sağlandığı varsayılmıştır. Çok değişkenli fonksiyonların ekstremumları için ikinci derece koşullarının neler oldukları hakkında, okuyucu, yazarın Mikroiktisat kitabının matematiksel ek kısmına başvurabilir.*

$$\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\right) = 420 - 4q_1 - 5q_2 = 0$$

İlk iki kısmi türev eşitliğinden elde ettiğimiz (λ) değerlerini birbirine eşitleyerek, aşağıdaki bağıntıya ulaşabiliriz.

$$\lambda \equiv \lambda \Rightarrow \quad 0{,}25q_2^2 = 0{,}4q_1 \cdot q_2 \Rightarrow \quad q_2 = 1{,}6q_1$$

(q_2)'nin (q_1) cinsinden bulduğumuz bu değerini, üçüncü kısmi türev eşitliğinde yerine koyarak, tüketicinin rasyonel davrandığında satınalacağı (q_1) ve (q_2) mal miktarlarını bulabiliriz.

$$420 - 4q_1 - 5(1{,}6q_1) = 0 \Rightarrow \quad 12q_1 = 420$$

$$\therefore \; q_1 = 35 \text{ ve } \; q_2 = 1{,}6\,(35) = 56 \text{ birim}$$

Bu durumda, tüketicinin $C = 420$ TL olan toplam harcaması, mallar arasında, aşağıdaki biçimde dağılacaktır.

$$420 = 4.(35) + 5.(56) = 140 + 280 = 420$$

***

Problem: 1.14

Her iki malı da (a) gibi aynı birim fiyattan satınalan bir tüketicinin optimum tüketim bileşiminin üzerinde yer aldığı kayıtsızlık eğrisinin kapalı denklemi $U^o - q_1 q_2^{0,5} = 0$ biçimindedir. Tüketici, (14) birim (q_1) malı satınaldığında,

a) davranışının rasyonel olabilmesi için kaç birim (q_2) malı satınalmalıdır?

b) Bu tüketici satınaldığı her iki mala toplam olarak ne kadar harcama yapar?

c) Bu tüketicinin bütçe doğrusunun eğimi kaçtır?

Çözüm: 1.14

a) Tüketici davranışının rasyonel olabilmesi için, malların fiyatlarının oranı malların marjinal faydaları oranına eşit olmalıdır.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

Malların marjinal faydalarını bulabilmek için, optimum tüketim bileşiminin üzerinde yer aldığı kayıtsızlık eğrisi kapalı denklemini açık hale getirerek, fayda fonksiyonunu belirleyelim.

$$U^o - q_1 q_2^{0,5} = 0 \Rightarrow \quad U^o = q_1 q_2^{0,5} \quad \therefore \quad U = q_1 q_2^{0,5}$$

Şimdi, fayda fonksiyonunun sırasıyla (q_1) ve (q_2)'ye göre kısmi türevlerini alarak malların marjinal faydalarını bulalım.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{q_2^{0,5}}{0{,}5q_1 q_2^{-0,5}} = \frac{q_2}{0{,}5q_1}$$

Malların marjinal faydaları oranını mal fiyatları oranına eşitleyelim.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow \frac{q_2}{0{,}5q_1} = \frac{a}{a} = 1$$

Elde ettiğimiz bu sonuncu eşitlikte (q_1) yerine, $q_1 = 14$ değerini koyarak, (q_2) malı miktarını tesbit edebiliriz.

$$\frac{\delta U/\delta q_1}{\delta U/\delta q_2} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow \frac{q_2}{0{,}5(14)} = 1 \therefore q_2 = 7 \text{ birim}$$

b) Malların fiyatları ve miktarları belli olduğuna göre, tüketicinin her iki mala yaptığı toplam harcama (C), kolayca bulunabilir.

$$C = P_1q_1 + P_2q_2 \Rightarrow C = (a)(14) + (a)(7)$$

$$\therefore C = 21 \text{ a TL}$$

c) Tüketici bütçe doğrusunun eğimi, mal fiyatları oranının (-) ile çarpımına eşittir. Her iki mal fiyatı da (a) gibi aynı büyüklüğe sahip olduğundan bütçe doğrusunun eğimi (- 1)'dir.

$$m = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{P_1}{P_2} = -\frac{a}{a} \therefore m = -1$$

***

Problem: 1.15

Alacağını tahsil etmek isteyen bir kimseye, karşı taraf iki farklı ödeme planı öneriyor. Piyasa faiz oranı $i = \% 20$ olduğuna göre, alacaklı, size göre, aşağıdaki ödeme planlarından hangisini kabul etmelidir?

Birinci ödeme planı: $R_1 = 150$ ve $R_2 = 300$ TL

İkinci ödeme planı: $R_1 = 300$ ve $R_2 = 132$ TL

Çözüm: 1.15

İlk bakışta alacaklının birinci ödeme planına göre tahsil edeceği para, öteki plana kıyasla, 18 lira daha fazladır. Ancak, her iki ödeme planının gerçekçi bir biçimde karşılaştırılabilmesi için bu planlarda yeralan ödeme tutarlarının bugünkü değerlere indirgenmesi gerekir.

Birinci ödeme planına göre yapılacak tahsilatın bugünkü değeri:

$$150 + \frac{300}{(1 + 0{,}20)} = 150 + 250 = 400 \text{ TL}$$

İkinci ödeme planına göre yapılacak tahsilatın bugünkü değeri:

$$300 + \frac{132}{(1 + 0{,}20)} = 300 + 110 = 410 \text{ TL}$$

Görülüyor ki, ilk bakışta elde edilen izlenim, aldatıcı olmuştur. Bugünkü değere indirgeyerek yaptığımız bir karşılaştırma, ikinci ödeme planının alacaklı açısından birinci ödeme planına tercih edileceğini göstermektedir.

***

Problem: 1.16

Hayatı iki dönemden oluşan bir tüketicinin bütün hayatı boyunca elde edeceği toplam fayda, her bir dönem tüketeceği mal miktarlarının bir fonksiyonu olarak aşağıda verilmiştir.

$$U = 243\, q_{11}^2 \cdot q_{21} \cdot q_{12} \cdot q_{22}^{0,5}$$

Malların dönemler itibariyle fiyatları ise $P_{11} = 1$ TL, $P_{21} = 2$ $P_{12} = 4$ TL ve $P_{22} = 3$ TL/birimdir. Bu verilerden hareket ederek tüketicinin çokdönemli fayda fonksiyonunu elde ediniz.

Çözüm: 1.16

Elde ettiği faydayı maksimize edebilmek için tüketici, hayatının birinci döneminde, aşağıdaki eşitliği gerçekleştirmek zorundadır.

$$\frac{\delta U/\delta q_{11}}{\delta U/\delta q_{21}} = \frac{P_{11}}{P_{21}}$$

$$\frac{486\, q_{11} \cdot q_{21} \cdot q_{12} \cdot q_{22}^{0,5}}{243\, q_{11}^2 \cdot q_{12} \cdot q_{22}^{0,5}} = \frac{1}{2} \quad \therefore q_{11} = 4q_{21}$$

İkinci döneminde de, aşağıdaki eşitliği gerçekleştirmek zorundadır.

$$\frac{\delta U/\delta q_{12}}{\delta U/\delta q_{22}} = \frac{P_{12}}{P_{22}}$$

$$\frac{243\, q_{11}^2 \cdot q_{21} \cdot q_{22}^{0,5}}{(121{,}5)\, q_{11}^2 \cdot q_{21} \cdot q_{12} \cdot q_{22}^{-0,5}} = \frac{4}{3} \quad \therefore q_{22} = (2/3)\, q_{12}$$

Bulduğumuz bu değerleri tüketicinin her bir dönem bütçe denkleminde yerlerine koyalım.

$$C_1 = P_{11}q_{11} + P_{21}q_{21} \Rightarrow C_1 = q_{11} + 2q_{21}$$

$$C_1 = 4q_{21} + 2q_{21}$$

$$\therefore q_{21} = \frac{C_1}{6} \text{ ve } q_{11} = 4q_{21} = \frac{4C_1}{6}$$

$$C_2 = P_{12}q_{12} + P_{22}q_{22} \Rightarrow C_2 = 4q_{12} + 3q_{22}$$

$$C_2 = 4q_{12} + 3.(2/3)q_{12}$$

$$\therefore q_{12} = \frac{C_2}{6} \text{ ve } q_{22} = (2/3).q_{12} = \frac{C_2}{9}$$

Malların, dönem tüketim harcamalarının bir fonksiyonu olarak ifade ettiğimiz bu değerlerini, tüketicinin mal tüketim fayda fonksiyonunda malların yerine koyduğumuzda, tüketicinin çokdönemli fayda fonksiyonuna ulaşırız.

$$U = 243\, q_{11}^2 \cdot q_{21} \cdot q_{12} \cdot q_{22}^{0,5}$$

$$U = 243\,\frac{(4C_1)^2}{(6)^2}\cdot\frac{C_1}{6}\cdot\frac{C_2}{6}\cdot\frac{(C_2)^{0,5}}{(9)^{0,5}}$$

$$\therefore\quad U = C_1^3.C_2^{1,5}$$

Bu örnek problemin çözümünde de görüldüğü gibi, tüketicinin çokdönemli fayda fonksiyonu, hiç bir biçimde, dönem piyasa faiz oranlarından etkilenmemektedir.

Bulduğumuz çokdönemli fayda fonksiyonu için zaman ikame oranı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$-\frac{dC_2}{dC_1} = \frac{\delta U/\delta C_1}{\delta U/\delta C_2} = \frac{3C_1^2.C_2^{1,5}}{(1,5)\,C_1^3.C_2^{0,5}} \Rightarrow -\frac{dC_2}{dC_1} = \frac{2C_2}{C_1}$$

***

Problem: 1.17

Hayatı iki dönemden oluşan bir tüketicinin çokdönemli fayda fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$U = C_1^3.C_2^{1,5}$$

Öte yandan, tüketici, hayatının ilk yarısında $R_1 = 1584$ TL ve ikinci yarısında da $R_2 = 2520$ TL gelir elde etmektedir. Sermaye piyasasında piyasa faiz oranı ise, $i_1 = \%\,25$'dir. Buna göre, hayatı boyunca elde edeceği toplam faydayı maksimize edebilmesi için tüketici her bir dönem itibariyle kaç TL harcama yapacaktır?

Çözüm: 1.17

Bu, bir kısıt altında maksimizasyon problemidir. Bu nedenle, Lagrange fonksiyonu yardımıyla çözülebilir. Amaç; tüketicinin çokdönemli fayda fonksiyonunu maksimize etmektir. Bu amacı gerçekleştirmede karşı karşıya kalınan kısıt ise, bütçe zaman denklemidir.

Öncelikle, tüketicinin kısıt denklemini oluşturarak işe başlayalım.

$$\sum_{t=1}^{T}(R_t - C_t).(1+j_{1t})^{-1} = 0$$

Ele aldığımız problemde, (t = 1, 2) olduğundan, tüketici, sermaye piyasasında yalnızca bir tek defa işlem yapabilecektir. Şu halde, iskonto oranını içeren bugünkü değer indirgeyicisi $[(1+j_{1t})^{-1}]$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$t = 1 \text{ için} \Rightarrow (1+j_{11})^{-1} = 1^{-1} = 1$$

$$t = 2 \text{ için} \Rightarrow (1+j_{12})^{-1} = 1^{-1}.(1+i_1)^{-1} = 1,25^{-1} = 0,8$$

Buna göre, tüketicinin bütçe zaman denklemi, aşağıdaki biçimi alır.

$$\boxed{(R_1 - C_1) + (R_2 - C_2).\ (1+i_1)^{-1} = 0}$$

Problemin verilerini, kısıt denklemi haline dönüştürülmüş bütçe zaman denkleminde yerlerine koyalım.

$$(1584 - C_1) + (2520 - C_2).\ (1+0,25)^{-1} = 0$$

$$(1584 - C_1) + (2520 - C_2).\ (0,8) = 0$$

$$(1584 - C_1) + (2016 - 0,8\,C_2) = 0$$

$$3600 - C_1 - 0,8C_2 = 0$$

Tüketicinin bütçe zaman denklemini elde ettik. Kısıt denklemi belli olduğuna göre, artık Lagrange fonksiyonunu oluşturabiliriz.

$$G = C_1^3.C_2^{1,5} + \lambda\,(3600 - C_1 - 0,8C_2)$$

Şimdi de, maksimizasyon için Lagrange fonksiyonunun kısmi türevlerini alalım.

$$\left(\frac{\delta G}{\delta C_1}\right) = 3C_1^2.C_2^{1,5} - \lambda = 0 \quad\therefore\quad \lambda = 3C_1^2.C_2^{1,5}$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta C_2}\right) = 1,5\,C_1^3.C_2^{0,5} - 0,8\lambda = 0 \quad\therefore\quad \lambda = 1,875\,C_1^3.C_2^{0,5}$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\right) = 3600 - C_1 - 0,8\,C_2 = 0$$

(λ)'nın ilk iki denklem yardımıyla elde edilen değerlerini birbirine eşitleyerek tüketicinin birinci dönem tüketim harcaması (C_1), tüketicinin ikinci dönem tüketim harcaması (C_2) cinsinden ifade edilebilir.

$$3C_1^2C_2^{1,5} = 1,875\,C_1^3C_2^{0,5} \quad\therefore\quad C_1 = 1,6\,C_2$$

(C_1) için bulunan bu değeri, üçüncü kısmi türev denkleminde yerine koyduğumuzda, tüketicinin dönem tüketim harcamaları, (C_1) ve (C_2)'nin sayısal değerleri elde edilir.

$$3600 - 1,6\,C_2 - 0,8\,C_2 = 0 \quad\therefore\quad C_2 = 1500 \text{ TL}$$

$$C_1 = 1,6\,C_2 = 1,6\,(1500) \quad\therefore\quad C_1 = 2400 \text{ TL}$$

Bu bilgilerin ışığı altında, görüyoruz ki, tüketici; birinci dönemde, 1584 TL'lik gelirine karşılık 2400 TL harcamaktadır. Demek ki, tüketici, bu dönemde 816 TL sermaye piyasasından borç almıştır. Buna karşılık, tüketici, ikinci dönemde 2520 TL'lik gelir elde ettiği halde, 1 500 TL'lik tüketim harcaması yapmaktadır. Bir başka deyişle, tüketici bu dönemde, 1020 TL tasarruf etmiştir. Ne var ki, tüketici, birinci dönemde 816 TL borç almıştır. Bu borç % 25 faiziyle birlikte ödenecektir. Borç, faiziyle birlikte, $(816).(1 + 0,25) = 1020$ TL tutmaktadır. Böylece, tüketici, artan geliriyle, birinci dönemde aldığı borcu ve faizini ödemiştir.

***

Problem: 1.18

Bir tüketicinin iki dönemli zaman fayda fonksiyonu $U = C_1.C_2^{0,5}$ biçimindedir. Tüketicinin 1. dönem geliri $R_1 = 450$ TL ve 2. dönem geliri $R_2 = 600$ TL'dir. Tüketicinin 1. dönem harcamasını piyasa faiz oranının bir fonksiyonu olarak $C_1 = f(i)$ biçiminde parametreleriyle birlikte ifade ediniz.

Çözüm: 1.18

Tüketicinin bütçe zaman denklemini, aşağıdaki biçimde oluşturabiliriz.

$$(R_1 - C_1) + (R_2 - C_2).(1+i_1)^{-1} = 0$$

Problemin verilerini, kısıt denklemi haline dönüştürülmüş bütçe zaman denkleminde yerlerine koyalım.

$$(450 - C_1) + (600 - C_2).(1+i)^{-1} = 0$$

$$450 + 600.(1+i)^{-1} - C_1 - C_2.(1+i)^{-1} = 0$$

Tüketicinin bütçe zaman denklemini elde ettik. Kısıt denklemi belli olduğuna göre, artık Lagrange fonksiyonunu oluşturabiliriz.

$$G = C_1.C_2^{0,5} + \lambda\left[450 + 600.(1+i)^{-1} - C_1 - C_2.(1+i)^{-1}\right]$$

Şimdi de, maksimizasyon için Lagrange fonksiyonunun kısmi türevlerini alalım.

$$\left(\frac{\delta G}{\delta C_1}\right) = C_2^{0,5} - \lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda = C_2^{0,5}$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta C_2}\right) = 0,5\,C_1.C_2^{-0,5} - \lambda\,(1+i)^{-1} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = 0,5(1+i)C_1.C_2^{-0,5}$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\right) = \left[450 + 600.(1+i)^{-1} - C_1 - C_2.(1+i)^{-1}\right] = 0$$

(λ)'nın ilk iki denklem yardımıyla elde edilen değerlerini birbirine eşitleyerek tüketicinin birinci dönem tüketim harcaması (C_1), tüketicinin ikinci dönem tüketim harcaması (C_2) cinsinden ifade edilebilir.

$$C_2^{0,5} = 0,5\,(1+i)\,C_1.C_2^{-0,5} \quad \therefore \quad C_1 = \frac{C_2}{0,5\,(1+i)}$$

(C_1)'in (C_2) cinsinden elde ettiğimiz bu değerini üçüncü kısmi türev denkleminde yerine koyduğumuzda, (C_2), piyasa faiz oranı (i)'nin bir fonksiyonu olarak elde edilir.

$$450 + 600.(1+i)^{-1} - \frac{C_2}{0,5\,(1+i)} - C_2.(1+i)^{-1} = 0$$

$$450 + 600.(1+i)^{-1} - 2C_2.(1+i)^{-1} - C_2.(1+i)^{-1} = 0$$

$$450 + 600.(1+i)^{-1} = 3C_2.(1+i)^{-1}$$

$$\therefore \quad C_2 = 150\,(1+i) + 200$$

(C_2)'nin fonksiyonel ifadesini, yine (C_2) cinsinden ifade edilmiş (C_1) eşitliğinde yerine koyduğumuzda, bu defa da, (C_1), piyasa faiz oranı (i)'nin bir fonksiyonu olarak bulunur.

$$\therefore \quad C_1 = \frac{C_2}{0,5\,(1+i)} = \frac{150\,(1+i) + 200}{0,5\,(1+i)}$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{400}{(1+i)} + 300$$

Elde ettiğimiz sonuçlara dikkat edilirse, piyasa faiz oranı (i) arttıkça, tüketici 1. dönem tüketimini azaltmakta, buna karşılık 2. dönem tüketimini artırmaktadır.

***

Problem: 1.19

Zaman fayda fonksiyonu $U = C_1^2.C_2$ biçiminde olan bir tüketicinin 1. dönem geliri R_1 = 2000 TL ve 2. dönem geliri de R_2 = 3000 TL'dir. Piyasa faiz oranı i = % 50 olduğuna göre, bu tüketici, rasyonel davrandığında, piyasaya ne kadar borç verir veya piyasadan ne kadar borç alır?

Çözüm: 1.19

Buna göre, tüketicinin bütçe zaman denklemi, aşağıdaki biçimi alır.

$$(R_1 - C_1) + (R_2 - C_2).(1+i_1)^{-1} = 0$$

Problemin verilerini, kısıt denklemi haline dönüştürülmüş bütçe zaman denkleminde yerlerine koyalım.

$$(2000 - C_1) + (3000 - C_2).(1+0,50)^{-1} = 0$$

$$(2000 - C_1) + (3000 - C_2).(1,5)^{-1} = 0$$

$$4000 - C_1 - (1,5)^{-1}C_2 = 0$$

Tüketicinin bütçe zaman denklemini elde ettik. Kısıt denklemi belli olduğuna göre, artık Lagrange fonksiyonunu oluşturabiliriz.

$$G = C_1^2.C_2 + \lambda\left[4000 - C_1 - (1,5)^{-1}C_2\right]$$

Şimdi de, maksimizasyon için Lagrange fonksiyonunun kısmi türevlerini alalım.

$$\left(\frac{\delta G}{\delta C_1}\right) = 2C_1C_2 - \lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 2C_1C_2$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta C_2}\right) = C_1^2 - (1,5)^{-1}\lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 1,5\,C_1^2$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\right) = 4000 - C_1 - (1,5)^{-1}C_2 = 0$$

(λ)'nın ilk iki denklem yardımıyla elde edilen değerlerini birbirine eşitleyerek tüketicinin birinci dönem tüketim harcaması (C_1), tüketicinin ikinci dönem tüketim harcaması (C_2) cinsinden ifade edilebilir.

$$2C_1C_2 = 1,5C_1^2 \quad \therefore \quad C_1 = \frac{4C_2}{3}$$

(C_1) için bulunan bu değeri, üçüncü denklemde yerine koyduğumuzda, tüketicinin dönem tüketim harcamaları, (C_1) ve (C_2)'nin sayısal değerleri elde edilir.

$$4000 - \frac{4C_2}{3} - (1{,}5)^{-1} C_2 = 0$$

$$4000 - \frac{4C_2}{3} - \frac{2C_2}{3} = 0 \quad \therefore \quad C_2 = 2000 \text{ TL}$$

$$C_1 = \frac{4C_2}{3} = \frac{4(2000)}{3} \cong 2667 \text{ TL}$$

Bu bilgilerin ışığı altında, görüyoruz ki, tüketici; birinci dönemde 2000 TL'lik gelirine karşılık 2667 TL harcamaktadır. Demek ki, tüketici, bu dönemde 667 TL sermaye piyasasından borç almıştır. Buna karşılık, tüketici, ikinci dönemde 3000 TL'lik gelir elde ettiği halde 2000 TL'lik tüketim harcaması yapmaktadır. Bir başka deyişle, tüketici bu dönemde, 1000 TL tasarruf etmiştir. Ne var ki, tüketici, birinci dönemde 667 TL borç almıştır. Bu borç % 50 faiziyle birlikte ödenecektir. Gerçekten de, borç, faiziyle birlikte, $(667).(1+0{,}50)=1000$ TL tutmaktadır. Böylece, tüketici, artan geliriyle; birinci dönemde aldığı borcu ve faizini ödemiştir.

***

Problem: 1.20

Bir tüketicinin bir gün için boş zaman (F) ve gelir (R) fayda fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$U = 48F + FR - F^2$$

Burada, (F) bir gün boyunca tüketicinin dinlendiği saat sayısını, (R) ise tüketicinin bir günde elde ettiği gelir tutarını göstermektedir.

a) Bir saatlik çalışma karşılığı ücret düzeyinin bilinmediğini varsayarak, tüketicinin günlük işgücü arzını (saat/gün), bir saatlik ücret düzeyi (P_L)'nin bir fonksiyonu olarak $L = f(P_L)$ biçiminde ifade ediniz.

b) Bir saatlik ücret düzeyini $P_L = 5$ TL varsayarak tüketicinin günde kaç saat çalışacağını ve ne kadar gelir elde edeceğini bulunuz.

Çözüm: 1.20

a) Lagrange fonksiyonunu oluşturarak işe başlayalım. Bunun için, bir yandan kısıt denklemini, öte yandan da tüketicinin bir günde elde edeceği geliri, çalışma süresi cinsinden ifade edelim.

$$T = F + L \Rightarrow 24 = F + L \Rightarrow 24 - F - L = 0$$

$$R = P_L . L$$

Fayda fonksiyonunda (R) yerine, onun (L) cinsinden değerini koyalım.

$$U = 48F + FR - F^2 \Rightarrow U = 48F + F(P_L.L) - F^2$$

$$\therefore \; U = 48F + P_L.FL - F^2$$

Artık Lagrange fonksiyonunu oluşturabiliriz.

$$G = 48F + P_L.FL - F^2 + \lambda(24 - F - L)$$

Maksimizasyon için fonksiyonun kısmi türevlerini alarak sıfıra eşitleyelim.

$$\frac{\delta G}{\delta F} = 48 + P_L.L - 2F - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 48 + P_L.L - 2F$$

$$\frac{\delta G}{\delta L} = P_L.F - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = P_L.F$$

$$\frac{\delta G}{\delta \lambda} = 24 - F - L = 0$$

Şimdi, bu denklem sistemini çözelim.

$$\lambda \equiv \lambda \Rightarrow P_L.F = 48 + P_L.L - 2F \quad \therefore \quad F = \frac{48 + P_L.L}{(P_L + 2)}$$

$$24 - F - L = 0 \Rightarrow 24 - \left[\frac{48 + P_L.L}{(P_L + 2)}\right] - L = 0$$

$$\therefore \; L = \frac{12P_L}{P_L + 1}$$

Bir saatlik emeğe ödenen ücret sıfıra doğru giderken, tüketici, hiç çalışmayacaktır. Buna karşılık ücret sonsuza (*) giderken, tüketici günde en çok 12 saat çalışacaktır.

$$\lim_{P_L \to 0} L = \lim_{P_L \to 0} \left(\frac{12P_L}{P_L + 1}\right) = 0$$

$$\lim_{P_L \to \infty} L = \lim_{P_L \to \infty} \left(\frac{12P_L}{P_L + 1}\right) = 12$$

Ayrıca (L)'nin (P_L)'ye göre türevi pozitif olduğundan, ücretteki artış, tüketicinin günlük çalışma süresini, bir başka deyişle, işgücü faktör arzını artıracaktır.

b) Saat ücreti $P_L = 5$ TL olduğunda tüketicinin günde kaç saat çalışacağı ve ne kadar gelir elde edeceği aşağıdaki gibi bulunur.

$$L = \frac{12P_L}{P_L + 1} \Rightarrow L = \frac{12(5)}{5 + 1} \quad \therefore \quad L = 10 \text{ saat}$$

$$R = P_L.L \Rightarrow R = (5).(10) \quad \therefore \quad R = 50 \text{ TL}$$

***

Problem: 1.21

Bir tüketicinin aylık gelir (R) ve boş zaman (F) fayda fonksiyonu $U = 60F + F.R - F^2$ biçimindedir. Burada, (F) tüketicinin bir ay boyunca dinlendiği gün sayısını, (R) ise tüketicinin bir ay boyunca elde ettiği gelir tutarını göstermektedir.

(*) *Limit alırken, okuyucu, L'Hopital Kuralı'ndan yararlanmalıdır.*

a) Bu tüketicinin iş gücü arzı (gün/ay) (L)'yi, günlük ücret düzeyinin bir fonksiyonu olarak $L_s = f(P_L)$ biçiminde ifade ediniz.

b) Ayrıca, bu tüketicinin günlük ücret sonsuza giderken, bir ayda en çok kaç gün çalışmaya razı olabileceğini bulunuz.

Çözüm: 1.21

a) Lagrange fonksiyonunu oluşturarak işe başlayalım. Bunun için, bir yandan kısıt denklemini, öte yandan da tüketicinin bir ayda elde edeceği geliri, çalışma süresi cinsinden ifade edelim.

$$T = F + L \Rightarrow 30 = F + L \Rightarrow 30 - F - L = 0$$

$$R = P_L . L$$

Fayda fonksiyonunda (R) yerine, onun (L) cinsinden değerini koyalım.

$$U = 60F + FR - F^2 \Rightarrow U = 60F + F(P_L.L) - F^2$$

$$\therefore \quad U = 60F + P_L.FL - F^2$$

Artık Lagrange fonksiyonunu oluşturabiliriz.

$$G = 60F + P_L.FL - F^2 + \lambda(30 - F - L)$$

Maksimizasyon için fonksiyonun kısmi türevlerini alarak sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{\delta G}{\delta F} = 60 + P_L.L - 2F - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 60 + P_L.L - 2F$$

$$\frac{\delta G}{\delta L} = P_L.F - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = P_L.F$$

$$\frac{\delta G}{\delta \lambda} = 30 - F - L = 0$$

Şimdi, bu denklem sistemini çözelim.

$$\lambda \equiv \lambda \Rightarrow P_L.F = 60 + P_L.L - 2F \quad \therefore \quad F = \frac{60 + P_L.L}{(P_L + 2)}$$

$$30 - F - L = 0 \Rightarrow 30 - \left[\frac{60 + P_L.L}{(P_L + 2)}\right] - L = 0$$

$$\therefore \quad L = \frac{15P_L}{P_L + 1}$$

b) Ücret sonsuza (*) giderken, tüketici ayda en çok 15 gün çalışacaktır.

$$\lim_{P_L \to \infty} L = \lim_{P_L \to \infty} \left(\frac{15P_L}{P_L + 1}\right) = 15$$

(*) *Limit alırken, okuyucu, L'Hopital Kuralı'ndan yararlanmalıdır.*

Ayrıca (L)'nin (P_L)'ye göre türevi pozitif olduğundan, ücretteki artış, tüketicinin aylık çalışma süresini, bir başka deyişle, işgücü faktör arzını artıracaktır.

***

Problem: 1.22

$U = q_1.q_2^2$ biçiminde bir fayda fonksiyonuna sahip olan bir tüketici malları, sırasıyla, $P_1 = 10$ ve $P_2 = 4$ TL/birim fiyattan satınalmaktadır. Bu tüketicinin gelir-tüketim eğrisini $q_2 = f(q_1)$ biçiminde ifade ediniz.

Çözüm: 1.22

Gelir-tüketim eğrisi, diğer şartlar veri iken, tüketicinin mal setine yaptığı harcama tutarı değiştiğinde tüketici optimumunu sağlayan mal bileşimlerinin geometrik yeri olduğuna göre, problem, tüketici denge eşitliğinden hareket edilerek çözülebilir. Tüketici denge şartını ifade ederek problemi çözelim.

$$\frac{(\delta U/\delta q_1)}{(\delta U/\delta q_2)} = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{q_2^2}{2q_1q_2} = \frac{10}{4} \Rightarrow 4q_2 = 20q_1 \quad \therefore \quad q_2 = 5q_1$$

***

Problem: 1.23

Bir tüketicinin (q_1) malı Engel fonksiyonu $q_1 = 100C - 0{,}2C^2$ biçimindedir. Tüketici, hangi gelir düzeyini geçtiğinde, bu mal, tüketici açısından önemsiz bir mal niteliği kazanmaya başlar?

Çözüm: 1.23

Bir malın önemsiz mal olabilmesi için tüketicinin geliri veya dönem harcaması arttığında bu mala olan tüketici talebinin azalması gerekir. Bu ise, Engel fonksiyonunun gelir veya dönem harcaması (C)'ye göre türevinin negatif değer alması demektir. Şu halde, yapılacak iş; problemde verilmiş Engel fonksiyonunun türevini alarak bunun hangi koşullarda negatif bir işaret alacağını incelemekten ibarettir.

$$\left(\frac{dq_1}{dC}\right) = 100 - 0{,}4C < 0 \quad \therefore \quad 100 < 0{,}4C$$

$$\therefore \quad C > 250 \text{ TL}$$

Şu halde, tüketicinin geliri veya dönem harcaması 250 TL'ye ulaşıncaya kadar normal olan bu mal, dönem geliri veya harcaması bu düzeyi aştığında önemsiz hale gelmektedir.

***

Problem: 1.24

Gelir-tüketim eğrisinin denklemi $q_2 = 2q_1 + 10$ biçiminde olan bir tüketici, malları sırasıyla, $P_1 = 5$ TL/birim ve $P_2 = 10$ TL/birim fiyattan satınalmaktadır. Bu tüketicinin (q_1) malı Engel fonksiyonunu $q_1 = f(C)$ biçiminde parametreleriyle birlikte ifade ediniz.

Çözüm: 1.24

Tüketicinin bütçe denklemini oluşturalım ve daha sonra bu bütçe denklemini kapalı formda ifade edelim.

$C = P_1q_1 + P_2q_2 \Rightarrow C - P_1q_1 - P_2q_2 = 0$

Bu kapalı denklemde, mal fiyatlarını ve (q_2)'nin gelir-tüketim eğrisiyle (q_1) cinsinden ifade edilmiş değerini yerlerine koyalım.

$C - 5q_1 - 10(2q_1 + 10) = 0 \Rightarrow C - 25q_1 - 100 = 0$

Ulaştığımız bu kapalı denklemi (q_1) için çözebiliriz.

$C - 25q_1 - 100 = 0 \quad \therefore \quad q_1 = 0{,}04\,C - 4$

Böylece, tüketicinin (q_1) malı Engel fonksiyonunu $q_1 = f(C)$ biçiminde parametreleriyle birlikte tesbit ettik. Elde ettiğimiz Engel fonksiyonuna dikkat edilirse, tüketici; dönem geliri veya dönem harcaması 100 TL'ye ulaşıncaya kadar bu maldan hiç satınalmamaktadır. Gerçekten de, gelirimiz belirli bir düzeye ulaşıncaya kadar hiç tüketmediğimiz bir çok mal ve hizmet vardır.

***

Problem: 1.25

Gelir-tüketim eğrisinin denklemi $q_2 = 4q_1 - 24$ biçiminde olan bir tüketici, (q_2) malını 4 TL/birim fiyattan satınalmaktadır. Buna göre, bu tüketici hangi harcama düzeyinden itibaren (q_1) malı tüketmeye başlar?

Çözüm: 1.25

Tüketicinin bütçe denklemini oluşturalım ve daha sonra bu bütçe denklemini kapalı formda ifade edelim.

$C = P_1q_1 + P_2q_2 \Rightarrow C - P_1q_1 - P_2q_2 = 0$

Bu kapalı denklemde, (q_2) malı fiyatını ve (q_2)'nin gelir-tüketim eğrisiyle (q_1) cinsinden ifade edilmiş değerini yerlerine koyalım.

$C - P_1q_1 - 4(4q_1 - 24) = 0 \Rightarrow C - P_1q_1 - 16q_1 + 96 = 0$

$C - P_1q_1 - 16q_1 + 96 = 0 \Rightarrow C - q_1(P_1 + 16) + 96 = 0$

Ulaştığımız bu kapalı denklemi (q_1) için çözebiliriz.

$$q_1 = \frac{C + 96}{P_1 + 16}$$

Buna göre, (q_1) malı fiyatı (P_1) ne olursa olsun, $C > 0$ gelir veya dönem harcamasında $q_1 > 0$ olacaktır. Şu halde, pozitif bütün gelir düzeylerinde tüketici (q_1) malından şu ya da bu ölçüde mutlaka satınalacaktır.

***

Problem: 1.26

Her iki mala yaptığı toplam harcama $C = 220$ TL olan bir tüketicinin, $(0 < P_1 < +\infty)$ aralığında, fiyat-tüketim eğrisinin denklemi aşağıda verilmiştir.

$$q_2 = 9 + \frac{11}{2q_1 + 1}$$

Bu bilgilerin ışığı altında, tüketicinin (q_2) malını hangi birim fiyattan satınaldığını bulunuz.

Çözüm: 1.26

Dönem harcaması ne olursa olsun, (q_1) malı fiyatı (P_1) sonsuza giderken, yani $(P_1 \rightarrow \infty)$ için, tüketici (q_1) malından satınalamaz hale gelecek, yani $(q_1 \rightarrow 0)$ olacaktır. Böyle bir durumda, kabul etmek gerekir ki, tüketici; dönem harcamasının tümüyle, yalnızca (q_2) malı satınalacaktır. Şu halde, yapılacak iş; $(q_1 \rightarrow 0)$ için, fiyat-tüketim eğrisinin limitini alıp, tüketicinin $C = 220$ TL harcamayla kaç birim (q_2) malı satınalacağını bulmaktan ibarettir.

$$\lim_{q_1 \rightarrow 0} q_2 = \lim_{q_1 \rightarrow 0}\left(9 + \frac{11}{2q_1 + 1}\right) = 20$$

Tüketicinin dönem harcamasını bütün parasıyla satınalabileceği (q_2) malı miktarına böldüğümüzde, (q_2) malının birim fiyatını elde ederiz.

$$P_2 = \frac{C}{q_2} \Rightarrow P_2 = \frac{220}{20} \quad \therefore \quad P_2 = 11 \text{ TL}$$

***

Problem: 1.27

Dönem tüketim harcaması (C) kadar olan bir tüketici; fiyatları sırasıyla (P_1) ve (P_2) olan (q_1) ve (q_2) mallarını tüketmektedir. Tüketicinin bu iki mala ilişkin fayda fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$U = q_1 + q_1q_2 + q_2^2$$

Bu tüketicinin (q_1) ve (q_2) malı Marshall'cı talep fonksiyonlarını, ayrı ayrı çıkarınız.

Çözüm: 1.27

Optimum tüketim bileşimini bulabilmek için Lagrange fonksiyonunu oluşturalım.

$$G = q_1 + q_1q_2 + q_2^2 + \lambda(C - P_1q_1 - P_2q_2)$$

Fonksiyonun kısmi türevlerini alarak, herbirini sıfıra eşitleyelim.

$$\left(\frac{\delta G}{\delta q_1}\right) = 1 + q_2 - \lambda P_1 = 0 \Rightarrow q_2 = \lambda P_1 - 1$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta q_2}\right) = q_1 + 2q_2 - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow q_1 = \lambda P_2 - 2q_2$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\right) = C - P_1.q_1 - P_2.q_2 = 0$$

Lagrange fonksiyonunun maksimumu için ikinci derece koşullarının varlığı doğrulandıktan sonra, yukarıdaki denklem sistemi (q_1) ve (q_2) için çözülür. Buna göre, çözüm sonucu (q_1) ve (q_2) için elde edilen Marshall'cı talep fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$q_1 = \frac{P_2.C - 2P_1.C + P_2^2}{2P_1(P_2 - P_1)} \quad \text{ve} \quad q_2 = \frac{C - P_2}{2(P_2 - P_1)}$$

Elde ettiğimiz talep fonksiyonları, dikkat edilirse, genel gösterimini $q_1 = f(P_1, P_2, C)$ ve $q_2 = f(P_1, P_2, C)$ biçiminde ifade ettiğimiz Marshall'cı talep fonksiyonlarının değişkenlerini içermektedir.

Örneğin, tüketicinin dönem tüketim harcaması C = 1050 TL ve malların fiyatları da sırasıyla P_1 = 2 TL/birim ve P_2 = 10 TL/birim olsaydı, tüketici rasyonel davrandığında (q_1) malından 200 birim ve (q_2) malından 65 birim talep edecekti.

***

Problem: 1.28

Bir tüketici, fiyatları sırasıyla (P_1) ve (P_2) olan (q_1) ve (q_2) mallarını tüketmektedir. Tüketicinin bu iki mala ilişkin fayda fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$U = q_1 q_2^2$$

Bu tüketicinin (q_1) ve (q_2) malı tazmin edilmiş Hicks'gil talep fonksiyonlarını ayrı ayrı çıkarınız.

Çözüm: 1.28

Tüketicinin amacı faydasını sabit tutup harcamasını minimize etmek olduğuna göre, tüketicinin Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$G = P_1.q_1 + P_2.q_2 + \lambda(U^{\circ} - q_1.q_2^2)$$

Lagrange fonksiyonunun kısmi türevlerini alarak sıfıra eşitleyelim.

$$\left(\frac{\delta G}{\delta q_1}\right) = P_1 - \lambda.q_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{P_1}{q_2^2}$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta q_2}\right) = P_2 - \lambda.2q_1q_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{P_2}{2q_1q_2}$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\right) = U^{\circ} - q_1.q_2^2 = 0$$

İlk iki denklemden elde edilen (λ) değerleri birbirine eşitlenerek, (q_2) değeri, (q_1) cinsinden elde edilebilir.

$$\lambda \equiv \lambda \Rightarrow \frac{P_1}{q_2^2} = \frac{P_2}{2q_1q_2} \quad \therefore \quad q_2 = \frac{2P_1}{P_2}.q_1$$

(q_2)'nin (q_1) cinsinden bu değeri üçüncü kısmi türev eşitliğinde yerine konularak, denklem çözülür.

$$\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\right) = U^{\circ} - q_1.q_2^2 = 0 \Rightarrow U^{\circ} - q_1.\left(\frac{2P_1}{P_2}.q_1\right)^2 = 0$$

$$\therefore \quad q_1 = \sqrt[3]{\frac{P_2^2 U^{\circ}}{2P_1^2}} \quad \text{ve} \quad q_2 = \sqrt[3]{\frac{2P_1 U^{\circ}}{P_2}}$$

***

Problem: 1.29

Birim fiyatları P_1 = 5 ve P_2 = 8 TL olan mallardan tüketici q_1 = 80 ve q_2 = 50 birim satınalmaktadır. (q_1) malı fiyatının 3 TL/birim düşmesi sonucunda, tüketici, Slutsky'e göre, geliri kaç lira artmışcasına davranma gereği duyar?

Çözüm: 1.29

(q_1) malı fiyatının düşmesinden önce tüketicinin ne kadar harcama yaptığını bulalım.

$$C = P_1 q_1 + P_2 q_2 \Rightarrow C = (5)(80) + (8)(50)$$

$$\therefore \quad C = 800 \text{ TL}$$

Şimdi de, (q_1) malı fiyatının düşmesinden sonra tüketicinin, önceki mal bileşimini ne kadar harcamayla satınalabileceğini bulalım.

$$C = P_1 q_1 + P_2 q_2 \Rightarrow C = (2)(80) + (8)(50)$$

$$\therefore \quad C = 560 \text{ TL}$$

Tüketici, her iki harcama tutarı arasında fark kadar, yani, (800 - 560 = 240) TL geliri artmışçasına davranacaktır.

***

Problem: 1.30

Bir tüketici, C = 800 TL harcayarak, birim fiyatları P_1 = 5 ve P_2 = 8 TL olan mallardan sırasıyla q_1 = 80 ve q_2 = 50 birim satınalmakta ve belirli bir fayda elde etmektedir.

(q_2) malı fiyatı (P_2)'nin P_2 = 10 TL'ye çıkmasından sonra, tüketici her iki mala C = 910 TL harcamakta ve malların herbirinden bilmediğimiz miktarlarda satınalmaktadır.

Hangi halde, tüketici daha müreffehtir?

Çözüm: 1.30

Problemde tüketicinin fayda fonksiyonu verilmediği için soruyu, Hicks'in bakış açısıyla irdelemek mümkün değildir. Buna karşılık, Slutsky'nin yaklaşımıyla soruya bir cevap verilebilir.

(q_2) malı fiyatının artmasıyla tüketici, kuşkusuz, bir reel gelir kaybına uğramıştır. Tüketicinin gelirindeki azalmayı bulabilmek için, önceki mal bileşimine şimdiki mal fiyatlarıyla ne kadar para harcaması gerektiğini araştırmalıyız.

$$C = P_1 q_1 + P_2 q_2 \Rightarrow C = (5)(80) + (10)(50)$$

$$\therefore \quad C = 900 \text{ TL}$$

Şu halde, tüketici 100 TL düzeyinde bir gelir kaybına uğramıştır. Tüketici, şimdi, 910 TL harcamakla toplam harcamasını 110 TL artırmıştır. Demek ki, tüketici, toplam harcamasını, uğradığı gelir kaybından daha fazla artırmakla, küçük de olsa reel harcama düzeyinde bir artış sağlamıştır. Bu nedenle, tüketici şimdi, şüphesiz, daha müreffehtir.

***

Problem: 1.31

Fayda fonksiyonu $U = q_1 q_2^2$ biçiminde olan bir tüketicinin her bir mala ilişkin tazmin edilmiş talep fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$q_1 = \sqrt[3]{\frac{P_2^2 U^o}{4P_1^2}} \quad \text{ve} \quad q_2 = \sqrt[3]{\frac{2P_1 U^o}{P_2}}$$

Bu tüketicinin harcama fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: 1.31

Tüketicinin bütçe denklemini oluşturalım.

$$C = P_1 . q_1 + P_2 . q_2$$

Bütçe denkleminde, (q_1) ve (q_2) yerine bunlara ait tazmin edilmiş talep fonksiyonlarını koyalım.

$$C = P_1 . \sqrt[3]{\frac{P_2^2 U^o}{4P_1^2}} + P_2 . \sqrt[3]{\frac{2P_1 U^o}{P_2}}$$

$$\therefore \quad C = \sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2 U^o} + \sqrt[3]{2P_1 P_2^2 U^o}$$

***

Problem: 1.32

$C = \sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2 U^o} + \sqrt[3]{2P_1 P_2^2 U^o}$ biçiminde bir harcama fonksiyonuna sahip olan bir tüketicinin dolaylı fayda fonksiyonunu elde ediniz.

Çözüm: 1.32

Tüketici harcama fonksiyonunu aşağıdaki biçimde yeniden düzenleyelim.

$$C = \sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2 U^o} + \sqrt[3]{8\,(0{,}25) P_1 P_2^2 U^o}$$

$$C = \sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2 U^o} + 2\sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2 U^o}$$

$$\therefore \quad C = 3\sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2 U^o} = 3\sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2}\ \sqrt[3]{U^o}$$

Buradan, tüketicinin fayda düzeyini, mal fiyatları ve dönem harcama tutarı cinsinden ifade edebiliriz.

$$\therefore \quad \sqrt[3]{U^o} = \frac{C}{3\sqrt[3]{(0{,}25) P_1 P_2^2}} \Rightarrow U = \frac{C^3}{(6{,}75)\, P_1 P_2^2}$$

***

Problem: 1.33

Bir tüketicinin dolaylı fayda fonksiyonu, aşağıda verilmiştir.

$$U = \frac{C^3}{(6{,}75)\, P_1 P_2^2}$$

Bu tüketicinin, (q_1) ve (q_2) malları Marshall'cı talep fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: 1.33

Tüketicinin bütçe denklemini ve dolaylı fayda fonksiyonunu, genel gösterim biçimiyle, yeniden ifade edelim.

$$C = P_1 . q_1 + P_2 . q_2$$

$$U = f(P_1, P_2, C)$$

($\delta C/\delta P_1$) ve ($\delta C/\delta P_2$) değerlerinin neye eşit olduklarını, sırasıyla bütçe denkleminden ve dolaylı fayda fonksiyonundan hareketle, araştıralım.

$$C = P_1 . q_1 + P_2 . q_2$$

$$\therefore \quad (\delta C/\delta P_1) = q_1 \quad \text{ve} \quad (\delta C/\delta P_2) = q_2$$

$$U = f(P_1, P_2, C) \Rightarrow (\delta C/\delta P_1) = -\frac{(\delta U/\delta P_1)}{(\delta U/\delta C)}$$

$$U = f(P_1, P_2, C) \Rightarrow (\delta C/\delta P_2) = -\frac{(\delta U/\delta P_2)}{(\delta U/\delta C)}$$

Yukarıdaki eşitliklerden kolayca aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$(\delta C/\delta P_1) \equiv (\delta C/\delta P_1) \Rightarrow q_1 = -\frac{(\delta U/\delta P_1)}{(\delta U/\delta C)}$$

$$\therefore \quad q_1 = f(P_1, P_2, C)$$

$$(\delta C/\delta P_2) \equiv (\delta C/\delta P_2) \Rightarrow q_2 = -\frac{(\delta U/\delta P_2)}{(\delta U/\delta C)}$$

$$\therefore \quad q_2 = f(P_1, P_2, C)$$

Bu eşitlikler gerçekte, Marshall'cı talep fonksiyonlarından başka bir şey değildir. Demek ki, tüketicinin harcama fonksiyonu ve dolaylı fayda fonksiyonundan hareketle, malların bayağı veya Marshall'cı talep fonksiyonlarına ulaşmak mümkündür. Bu bilgilerin ışığı altında, problemi kolayca çözebiliriz.

$$q_1 = -\frac{(\delta U/\delta P_1)}{(\delta U/\delta C)} \Rightarrow q_1 = \frac{C^3}{(6{,}75)P_1^2P_2^2} \cdot \frac{(6{,}75)P_1P_2^2}{3C^2}$$

$$\therefore \quad q_1 = \frac{C.P_2^0}{3P_1}$$

$$q_2 = -\frac{(\delta U/\delta P_2)}{(\delta U/\delta C)} \Rightarrow q_2 = \frac{2C^3}{(6{,}75)P_1P_2^3} \cdot \frac{(6{,}75)P_1P_2^2}{3C^2}$$

$$\therefore \quad q_2 = \frac{2C.P_1^0}{3P_2}$$

***

Problem: 1.34

Fayda fonksiyonu $U = q_1 q_2^2$ biçiminde olan bir tüketicinin tazmin edilmiş talep fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

$$q_1 = \sqrt[3]{\frac{P_2^2U^0}{4P_1^2}} \quad \text{ve} \quad q_2 = \sqrt[3]{\frac{2P_1U^0}{P_2}}$$

a) Çapraz ikame etkilerinin simetrik olduğunu gösteriniz.

b) $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = 0$, yani (q_1) malı tazmin edilmiş talebinin (P_1) ve (P_2) fiyatlarına karşı esneklik katsayıları toplamının sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm: 1.34

a) $$\left[\left(\frac{\delta q_1}{\delta P_2}\right)_{U=\text{sabit}}\right] = \left[\left(\frac{\delta q_2}{\delta P_1}\right)_{U=\text{sabit}}\right]$$

(q_1) talep fonksiyonunu daha açık yazarak, (P_2)'ye göre kısmi türevini alalım.

$$q_1 = \sqrt[3]{\frac{P_2^2U^0}{4P_1^2}} \Rightarrow q_1 = 4^{-1/3}P_2^{2/3}U^{1/3}P_1^{-2/3}$$

$$\left(\frac{\delta q_1}{\delta P_2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)4^{-1/3}P_2^{-1/3}U^{1/3}P_1^{-2/3}$$

Şimdi de, (q_2) talep fonksiyonunu daha açık yazarak, (P_1)'e göre kısmi türevini alalım.

$$q_2 = \sqrt[3]{\frac{2P_1U^0}{P_2}} \Rightarrow q_2 = 2^{1/3}P_2^{-1/3}U^{1/3}P_1^{1/3}$$

$$\left(\frac{\delta q_2}{\delta P_1}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)2^{1/3}P_2^{-1/3}U^{1/3}P_1^{-2/3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)4^{-1/3}P_2^{-1/3}U^{1/3}P_1^{-2/3} = \left(\frac{1}{3}\right)2^{1/3}P_2^{-1/3}U^{1/3}P_1^{-2/3}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}\right)4^{-1/3} = \left(\frac{1}{3}\right)2^{1/3} \Rightarrow (2^{3/3}).(2^{-2/3}) = 2^{1/3}$$

b) $$\varepsilon_{11} = \frac{\delta q_1}{\delta P_1} \cdot \frac{P_1}{q_1} \Rightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{2}{3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\delta q_1}{\delta P_2} \cdot \frac{P_2}{q_1} \Rightarrow \varepsilon_{12} = \frac{2}{3}$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

***

Problem: 1.35

Bir tüketicinin (q_1) malı Marshall'cı talep fonksiyonu $q_1 = 4C^{0,5}.P_1^{-1}$ biçimindedir. Tüketicinin bütün mallara yönelik dönem harcaması C = 100 TL olduğunda, (q_1) malı talebinin kendi fiyatına olan ikame esneklik katsayısı (ε_{11}), hangi değeri alır?

Çözüm: 1.35

Tüketicinin (q_1) malı talebinin, yine bu malın fiyatına olan ikame esneklik katsayısı sorulduğuna göre, bu katsayıyı da içeren Slutsky denklemini yazalım.

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - e_{1C} \cdot v_1 \Rightarrow \varepsilon_{11} = e_{11} + e_{1C} \cdot v_1$$

Şimdi, sırasıyla, (q_1) malı talebinin fiyat esnekliği (e_{11})'i, gelir esnekliği (e_{1C})'yi ve bu malın tüketici toplam harcaması içindeki payı (v_1)'i bulalım.

$$e_{11} = \frac{\delta q_1}{\delta P_1} \cdot \frac{P_1}{q_1} \Rightarrow e_{11} = -4C^{0,5}P_1^{-2}\frac{P_1}{4C^{0,5}P_1^{-1}}$$

$$\therefore \quad e_{11} = -1$$

$$e_{1C} = \frac{\delta q_1}{\delta C} \cdot \frac{C}{q_1} \Rightarrow e_{1C} = 2C^{-0,5}P_1^{-1}\frac{C}{4C^{0,5}P_1^{-1}}$$

$$\therefore \quad e_{1C} = 0{,}5$$

$$v_1 = \frac{P_1q_1}{C} = \frac{P_1 4C^{0,5}P_1^{-1}}{C}$$

$$v_1 = \frac{4}{C^{0,5}} = \frac{4}{\sqrt{100}} \quad \therefore \quad v_1 = 0{,}4$$

Elde ettiğimiz bu büyüklükleri, esneklik katsayıları cinsinden ifade edilmiş Slutsky denkleminde yerlerine koyalım.

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + e_{1C} \cdot v_1 \Rightarrow \varepsilon_{11} = (-1) + (0{,}5).(0{,}4)$$

$\therefore \ \varepsilon_{11} = -0,8$

***

Problem: 1.36

İki mal tüketen bir tüketicinin (q_1) malına ilişkin Marshall'cı ve tazmin edilmiş talep fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

Marshall'cı talep fonksiyonu: $q_1 = \dfrac{C + 2P_2 - P_1}{2P_1}$

Hicks'gil talep fonksiyonu: $q_1 = \left[\dfrac{P_2(U^{\circ}+2)}{P_1}\right]^{0,5} - 1$

Malları sırasıyla $P_1 = 20$ TL/birim ve $P_2 = 20$ TL/birim fiyatlardan satınalan tüketici, her iki mala toplam olarak $C = 380$ TL harcamaktadır.

Durum bu iken, (q_1) malı fiyatı 12 TL/birime düşmüştür. Bu olgu, kuşkusuz, tüketicinin (q_1) malı talebini etkileyecektir. Bu bilgilerin ışığı altında,

a) tüketicinin (q_1) malı talebi kaç birim değişir?

b) Bu değişmenin,

ba) ne kadarı Hicks ikame etkisi, ne kadarı Hicks gelir etkisiyle olmuştur?

bb) Ne kadarı Slutsky ikame etkisiyle, ne kadarı Slutsky gelir etkisiyle olmuştur?

Çözüm: 1.36

a) (q_1) malı fiyatı düşmeden ve düştükten sonraki (q_1) malı Marshall'cı taleplerini bularak, talepteki değişmeyi belirleyebiliriz.

$$q_1 = \frac{C + 2P_2 - P_1}{2P_1} = \frac{380 + 2(20) - 20}{2(20)} \quad \therefore \ q_1 = 10$$

$$q_1 = \frac{C + 2P_2 - P_1}{2P_1} = \frac{380 + 2(20) - 12}{2(12)} \quad \therefore \ q_1 = 17$$

Buna göre, tüketicinin (q_1) malı talebi $\Delta q_1 = 7$ birim artmıştır.

b)

ba) (q_1) malı fiyatının değişmesinden önceki verileri (q_1) malı Hicks'gil talep fonksiyonunda yerlerine koyalım.

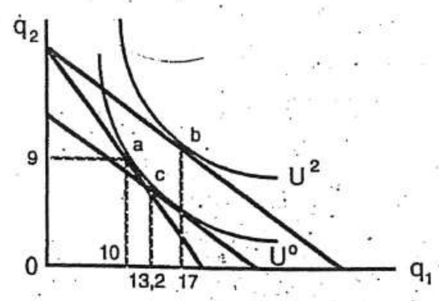
$$q_1 = \left[\frac{P_2(U^{\circ}+2)}{P_1}\right]^{0,5} - 1 \Rightarrow 10 = \left[\frac{(20)\,(U^{\circ}+2)}{(20)}\right]^{0,5} - 1$$

$\therefore \ U^{\circ} = 119$

(P_1) fiyatının düşmesinin yarattığı ikame etkisini bulabilmek için, tüketicinin daha önce elde ettiği $U^{\circ} = 119$ faydası sabit kalacak biçimde, fiyat değişikliğinden sonraki (q_1) malı Hicks'gil talebini bulmamız gerekir.

$$q_1 = \left[\frac{P_2(U^{\circ}+2)}{P_1}\right]^{0,5} - 1 \Rightarrow q_1 = \left[\frac{(20)\,(119+2)}{(12)}\right]^{0,5} - 1$$

$\therefore \ q_1 \cong 13,2$



Şu halde, (q_1) malı talebindeki 7 birimlik değişmenin 3,2 birimi Hicks ikame etkisiyle, geriye kalan 3,8 birimi ise Hicks gelir etkisiyle ortaya çıkmıştır.

bb) Tüketicinin, (q_1) malı fiyatının düşmesinden sonra, düşme öncesi mal bileşimini satınalması halinde harcayacağı para miktarını bulmamız gerekir. Ne var ki, bunun için, tüketicinin başlangıçta kaç birim (q_2) malı aldığını da bilmeliyiz.

$$C = P_1 q_1 + P_2 q_2 \Rightarrow 380 = 20(10) + 20q_2$$

$\therefore \ q_2 = 9$ birim

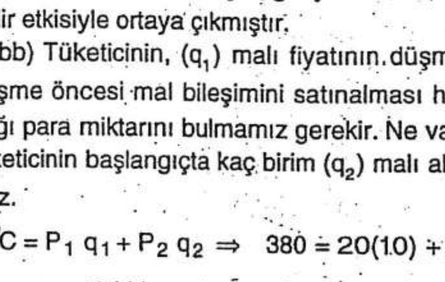
Şimdi, tüketicinin Slutsky ikame etkisiyle, her iki mala, toplam olarak kaç lira harcamışçasına davranacağını bulabiliriz.

$$C = P_1 q_1 + P_2 q_2 \Rightarrow C = 12(10) + 20(9)$$

$\therefore \ C = 300$ TL

Buna göre, tüketicinin $C = 300$ TL dönem harcaması ile ne kadar (q_1) malı talep edeceğini bulabiliriz.

$$q_1 = \frac{C + 2P_2 - P_1}{2P_1} = \frac{300 + 2(20) - 12}{2(12)} \quad \therefore \ q_1 \cong 13,7$$



Şu halde, Slutsky ikame etkisiyle tüketici 3,7 birim, Slutsky gelir etkisiyle ise 3,3 birim (q_1) malı talebini artırmıştır.

Çözüm sonuçlarına dikkat edilirse, Slutsky ikame etkisi, Hicks ikame etkisinden daha güçlüdür. Buna karşılık Slutsky gelir etkisi, Hicks gelir etkisinden daha zayıftır. Yine, okuyucu gözden kaçırmamalıdır ki, Hicks ikame etkisinde tüketicinin başlangıçtaki fayda düzeyi sabit kalırken, Slutsky ikame etkisinde tüketici başlangıçtakine kıyasla daha yüksek bir fayda düzeyine ulaşmaktadır. Bu, Slutsky'e göre, fiyat değişmesi sonucu ikame yoluna giden tüketicinin, bir bakıma, ödüllendirilmesidir.

***

Problem: 1.37

İki mal tüketen bir tüketici için (q_1) malı Marshall'cı talep fonksiyonu $q_1 = P_1^{-0,7}.P_2^{0,3}.C^{0,7}$ olarak tahmin edilmiştir.

Dikkatle bakıldığında, bu talep fonksiyonunun parametrik tutarlılıktan yoksun olduğu görülmektedir. Talep fonksiyonunun parametrik tutarlılığını, Slutsky denklemine uygun olarak herhangi bir biçimde sağlayıp yeniden yazınız.

Çözüm: 1.37

Marshall'cı talep fonksiyonlarının temel özelliklerinden birisi, sıfır derecesinden homojen olmalarıdır. Bir başka deyişle, tüketici geliri ve mal fiyatlarında, aynı anda, aynı yönde ve aynı oranda ortaya çıkacak değişmeler; tüketicinin belirli bir mal talebini etkilemez. Şimdi, problemde verilen talep fonksiyonunun homojenlik derecesini araştıralım.

$$(tP_1)^{-0,7}(tP_2)^{0,3}(tC)^{0,7} = t^{-0,7}P_1^{-0,7}t^{0,3}P_2^{0,3}t^{0,7}C^{0,7}$$

$$\therefore\ t^{(-0,7+0,3+0,7)}P_1^{-0,7}P_2^{0,3}C^{0,7} = t^{0,3}.q_1$$

Görüldüğü gibi, problemde verilen talep fonksiyonunun homojenlik derecesi k = 0,3'tür. Şu halde, yapılacak iş; talep fonksiyonunun homojenlik derecesini k=0 kılacak biçimde parametre değişikliği yapmaktır. Bunu sağlayan, pek çok seçenek vardır. Bunlardan bir kaçı aşağıda gösterilmiştir.

$$q_1 = P_1^{-0,7}P_2^{0,3}C^{0,4}$$

$$q_1 = P_1^{-1}P_2^{0,3}C^{0,7}$$

$$q_1 = P_1^{-0,7}P_2C^{-0,3}$$

***

Problem: 1.38

Yalnızca iki mal tüketen bir tüketici dönem harcamasının tümünü bu iki mala yapmaktadır. Bu tüketici için malların her ikisinin de önemsiz mal olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: 1.38

Bu tüketicinin bütçe denklemini oluşturarak, bunun toplam differansiyelini alalım.

$$C = P_1q_1 + P_2q_2$$

$$dC = \left(\frac{\delta C}{\delta P_1}\right)dP_1 + \left(\frac{\delta C}{\delta q_1}\right)dq_1 + \left(\frac{\delta C}{\delta P_2}\right)dP_2 + \left(\frac{\delta C}{\delta q_2}\right)dq_2$$

Mal fiyatları değişmediğine göre, ($dP_1 = 0$) ve ($dP_2 = 0$) değerlerini toplam differansiyel denkleminde yerlerine koyalım.

$$dC = \left(\frac{\delta C}{\delta q_1}\right)dq_1 + \left(\frac{\delta C}{\delta q_2}\right)dq_2$$

Kısmi türevleri alarak, yukarıdaki denklemi yeniden düzenleyelim.

$$dC = P_1dq_1 + P_2dq_2$$

Şimdi, bu denklemin her iki tarafını (dC)'ye bölelim.

$$1 = P_1\left(\frac{dq_1}{dC}\right) + P_2\left(\frac{dq_2}{dC}\right)$$

Malların her ikisinin de önemsiz olması aşağıdaki eşitsizliklerin gerçekleşmesini gerektirir.

$$\left(\frac{dq_1}{dC}\right) < 0 \text{ ve } \left(\frac{dq_2}{dC}\right) < 0$$

Mal fiyatları pozitif olduğundan böyle bir durumda, yukarıdaki eşitlik gerçekleşemez. Bu nedenle, iki mal tüketen bir tüketici için mallardan ancak birisi önemsiz olabilir. Her ikisinin'de aynı zamanda önemsiz olması mümkün değildir.

***

Problem: 1.39

Slutsky denkleminden yola çıkarak bir malın Giffen malı olabilmesinin şartlarını irdeleyiniz.

Çözüm: 1.39

Talep yasasına göre bir malın fiyatı arttığında onun talebi düşer. İstisnai de olsa böyle davranmayan mallar vardır. Bu tür mallara Giffen malı denir. Giffen mallarında talep değişmesi fiyat değişmesiyle aynı yöndedir. Bir başka deyişle, malın fiyatı arttığında talebi artmakta, fiyatı düştüğünde ise talebi de düşmektedir. Bir başka deyişle, ($e_{11} > 0$) olmaktadır.

Şimdi, Slutsky denklemini esneklikler cinsinden ifade ederek bir malın Giffen malı olabilmesinin şartlarını irdeleyelim.

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - e_{1C}.v_1$$

Malın Giffen malı, yani ($e_{11} > 0$) olabilmesi yukarıdaki eşitliğe göre aynı zamanda aşağıdaki eşitsizliklerin de gerçekleşmesini gerektirir.

$$(\varepsilon_{11} - e_{1C}.v_1) > 0 \quad \therefore \quad \varepsilon_{11} > e_{1C}.v_1$$

Ulaştığımız son eşitsizliğin sol tarafında yer alan ikame esneklik katsayısı (ε_{11}), her zaman negatiftir. Negatif bir büyüklüğün kendisinden büyük olduğu bütün değerler, negatif olmak zorundadır. Bu nedenle, eşitsizliğin sağ yanında yer alan ($e_{1C}.v_1$) ifadesi de negatif olmak zorundadır. (v_1); tüketicinin söz konusu mala yaptığı harcamanın dönem harcaması içindeki oransal payını gösterir ve bu pay, her zaman pozitiftir. Bu durumda, eşitsizliğin sağlanması (e_{1C})'nin negatif değer almasını zorunlu kılar. (e_{1C})'nin